2.2 Erzeugendensysteme

a) Lineare Hülle

<u>Erinnerung:</u> Sei $A \subset G$ Teilmenge einer Gruppe $(G, \cdot)$.

$$\mathrm{erz}(A) = \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}$$

$\Rightarrow$ kleinste Untergruppe von G, die A enthält

<u>Def.:</u> Seien V ein K-Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Wir nennen

$$\mathrm{span}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in K, v_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die lineare Hülle von A, d.h. die Menge aller endlichen Linearkombinationen aus Vektoren in A.

Ist $A = \emptyset$, so setzen wir $\mathrm{span}(A) = \{0\} \subset V$.

<u>Bem.:</u>

(1) sei $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ endlich, dann ist

$$\mathrm{span}(A) = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in K, 1 \le i \le r\}$$

(einige λ_i können 0 sein)

(2) $\mathrm{span}(A)$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der A enthält, d.h.

(i) $\mathrm{span}(A) \subset V$ ist ein Untervektorraum.

(ii) Ist $W \subset V$ Untervektorraum, und gilt $A \subset W$, so ist $\mathrm{span}(A) \subset W$.

__Bew.:__

(i) ist klar: $\operatorname{span}(A) \neq 0$. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j = \sum_{k=1}^{n+m} \nu_k u_k$,
wobei $(u_1, \dots, u_{n+m}) = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$, $(\nu_k) = (\dots \lambda_i \dots, \dots \mu_j \dots)$,
außerdem $\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) v_i$

(ii) $A \subset W$, W ist Untervektorraum $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \subset W$
für alle $\lambda_i \in K, v_i \in A, n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{span}(A) \subset W$. ◻

__Beispiele:__

(1) $v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \operatorname{span}(v)$ ist die Gerade durch 0 und v
$v, w \in \mathbb{R}^3$ und v, w sind nicht kolinear,
d.h. es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda v = w$
$\Rightarrow \operatorname{span}(v, w)$ ist die Ebene durch $0, v, w$

(2) Einheitsvektoren $e_i := (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ Position } i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$
„Die Einheitsvektoren spannen den $\mathbb{R}^n$ auf."

(3) $t^2 \in \mathbb{R}[t] \Rightarrow \operatorname{span}(t^2) = \{\lambda t^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
$\operatorname{span}(1, t, t^2) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
$= \mathbb{R}[t]_2$ Polynome vom Grad ≤ 2

Für den Ring $\mathbb{R}[t]$ von Polynomen beliebigen Grades brauchen wir $A = \{1, t, t^2, \dots\} = \{t^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
$\Rightarrow \operatorname{span}(A) = \mathbb{R}[t]$ „Monome" in t

b) Lineare Unabhängigkeit

Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist eine numerierte Teilmenge (genauer: eine Abbildung $I \to V$, $i \mapsto v_i$), ein Element kann dabei mehrfach auftreten (die Abb. ist nicht injektiv). Offenbar ist $\mathrm{span}(\underbrace{(v_i)_{i\in I}}_{\text{Familie}}) = \mathrm{span}(\underbrace{\{v_i \mid i\in I\}}_{\text{Menge}})$.

<u>Bsp.:</u> Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Familie von Vektoren $v_i \in V$, wobei es geeignete $\lambda_i \in K$ gebe, so daß $v_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i v_i$. Dann heißt $(v_1, \dots, v_r)$ linear abhängig. Daraus folgt:

(i) $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_r) = \mathrm{span}(v_2, \dots, v_r)$ v_1 wird nicht gebraucht

(ii) die Darstellung des Nullvektors ist nicht eindeutig:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \quad \text{mit } \lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2, \dots, \lambda_r \text{ wie oben}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} 0 \cdot v_i \qquad \text{(„triviale" Darstellung)}$$

<u>Def.:</u> Sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $(v_1, \dots, v_r)$ aus V heißt linear unabhängig, falls für $\lambda_i \in K$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$
Eine beliebige Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist. Die leere Familie $(I = \emptyset)$ ist linear unabhängig.

Bem.:

(1) $(v_1,\dots,v_r)$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $0 \in V$ hat nur die triviale Darstellung. $0 = \sum_{i=1}^{r} 0 \cdot v_i$

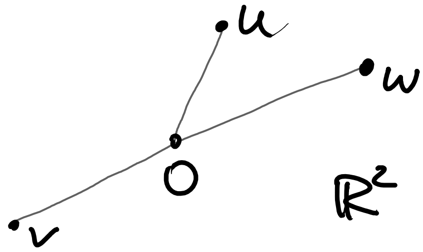
(2) eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt linear abhängig, falls sie nicht linear unabhängig ist, d.h. falls es eine endliche Teilfamilie $(v_j)_{j\in J}$ mit $J \subset I$ endlich und $\lambda_j \in K$ gibt, so daß $\lambda_{j^*} \neq 0$ für ein $j^* \in J$ und $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$.

Für I endlich, z.B. $I = \{1,2,\dots,r\}$:

$(v_1,\dots,v_r)$ ist linear abhängig, falls es $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K$ gibt, die nicht alle Null sind und $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0$.

z.B. $\lambda_1 \neq 0$

(3) geometrische Interpretation:



(v,w) sind linear abhängig, da $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in K$.

(u,v) sind linear unabhängig, (u,w) ebenfalls.

Die Familie (u,v,w) ist linear abhängig.

Außerdem: $w \in \operatorname{span}(u,v) = \mathbb{R}^2$, $v \in \operatorname{span}(u,w)$,

aber $u \notin \operatorname{span}(v,w) = \operatorname{span}(v) = \operatorname{span}(w)$

(4) die Einheitsvektoren $(e_1, \dots, e_r)$ des K^n sind linear unabhängig $(r \leq n)$

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) \iff \lambda_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

(5) im Polynomring $K[t]$ sind die Monome $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ linear unabhängig

unendliche Familie

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k \iff a_k = 0 \text{ für } k = 1, \dots, n \quad (n \in \mathbb{N})$$

(6) Ein einziger Vektor $v \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$.

Bew.: Sei (v) linear abhängig. $\Rightarrow$ es gibt ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $\lambda v = 0$, also $v = 0$. Umkehrung: aus $v = 0$ folgt wegen $1 \cdot 0 = 0$, daß (v) linear abhängig ist. $\square$

(7) Enthält eine Familie den Nullvektor, so ist sie linear abhängig.

Bew.: $1 \cdot 0 = 0$, nicht-triviale Darstellung von $0 \in V$. $\square$

(8) Enthält eine Familie einen Vektor mehrfach, so ist sie linear abhängig.

Bew.: Gibt es $i, j \in I$ mit $i \neq j$, aber $v_i = v_j$, so ist $1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 0$. $\square$

(9) alternatives Kriterium für $r \geq 2$:
Die Vektoren $(v_1, \dots, v_r)$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer davon Linearkombination der anderen ist.

Bew.: $\Rightarrow$: $(v_1, \dots, v_r)$ sind linear abhängig, also gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, so daß $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0$ und ein $\lambda_k \neq 0$ $(1 \leq k \leq r)$. Dann ist $v_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} v_i$.
$\Leftarrow$: Gilt $v_k = \sum_{i \neq k} \mu_i v_i$, so folgt $\sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i = 0$ mit $\mu_k = -1$. □

Lemma: Eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i \in I}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jeder Vektor $w \in \operatorname{span}(v_i)$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination aus Vektoren aus (v_i) hat.

Bew.:
$\Rightarrow$: Für ein $w \in \operatorname{span}(v_i)$ gebe es eine endliche Indexmenge $J \subset I$ und $\lambda_i, \mu_i \in K$ für $i \in J$, so daß
$$w = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i = \sum_{i \in J} \mu_i v_i.$$ (zwei Darstellungen)

Also ist $\sum_{i \in J} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$.

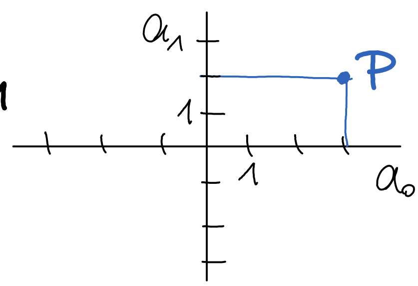
Nach Voraussetzung folgt $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i \in J$.
(lineare Unabhängigkeit von $(v_i)_{i\in J}$ für alle $J \subset I$.)
Folglich ist die Darstellung von w eindeutig.

$\Leftarrow$: sei (v_i) linear abhängig, dann gibt es zwei (oder mehr) Darstellungen von $0 \in \mathrm{span}(v_i)$

$\square$

Bem.: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig und $w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$.
Dann heißen die Koeffizienten λ_i die Koordinaten von w bezüglich $(v_1, \dots, v_r)$. Die Zuordnung $w \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ist eindeutig (sogar bijektiv).

Bsp.: $P = 2t + 3 \in \mathrm{span}(1, t) \subset \mathbb{R}[t]_1$
$v_0 = 1, v_1 = t \Rightarrow a_0 = 3, a_1 = 2$



c) Basis

Wie groß ist ein Vektorraum? Wann ist $\mathrm{span}(v_i) = V$?
Wieviele linear unabhängige Vektoren gibt es in V?

<u>Def.:</u> Eine Familie $B = (v_i)_{i \in I}$ in einem Vektorraum V heißt Erzeugendensystem von V, wenn $V = \mathrm{span}(B)$, d.h. jedes $v \in V$ ist Linearkombination von endlich vielen v_i. Gibt es ein endliches Erzeugendensystem $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V, so heißt V endlich erzeugt.
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem B von V heißt Basis von V. Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$, so nennt man n die Länge der Basis.

<u>Bem.:</u>

(1) $B = \emptyset$ ist eine Basis des Nullvektorraums $\{0\}$

(2) die Einheitsvektoren $(e_1, \dots, e_n)$ bilden <u>eine</u> Basis des K^n, die kanonische Basis.

griech. κανών = Maßstab, Richtschnur, Leitfaden, vgl. Bibelkanon

lat. canonicus = normal, natürlich, maßgeblich

⇝ die dem Vektorraum natürlich innewohnende Basis

(3) $(1, i)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ und hat Länge 2. Dagegen ist (1) eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}$.

(4) $(t^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Basis unendlicher Länge des Polynomrings $K[t]$.

(5) die Basis eines Vektorraums ist nicht eindeutig

<u>Satz</u>: Für eine Familie $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ von Vektoren eines K-Vektorraums $V \neq \{0\}$ ist folgendes äquivalent:

i) $\mathcal{B}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, d.h. eine Basis.

ii) $\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. für jedes $j\in I$ ist $\operatorname{span}(v_i)_{i\in J} \neq V$ mit $J = I\setminus\{j\}$.
(Eine Basis kann nicht verkürzt werden.)

iii) $\mathcal{B}$ ist eine maximale linear unabhängige Familie, d.h. für jedes $w\in V$ ist $\mathcal{B}\cup(w)$ linear abhängig.
(Eine Basis kann nicht verlängert werden.)

iv) Jedes $w\in V$ hat eindeutig bestimmte Koordinaten $\lambda_i\in K$ $(i\in I)$ mit $w = \sum_{i\in I}\lambda_i v_i$, wobei nur endlich viele $\lambda_i\neq 0$ sind.

<u>Bew.:</u> Wir zeigen i) $\Rightarrow$ ii), ii) $\Rightarrow$ iv), iv) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ i)

i) $\Rightarrow$ ii): Wäre B verkürzbar, so gäbe es ein $j \in I$ und $J = I \setminus \{j\}$ mit $v_j \in \mathrm{span}(v_i)_{i \in J}$ $\Rightarrow$ B wäre linear abhängig. $\lightning$
§2.2b(9)

ii) $\Rightarrow$ iv): Angenommen, die Darstellung eines $w \in V$ ist nicht eindeutig, d.h. es gibt $J \subset I$ endlich, $\lambda_i, \mu_i \in K$ mit $w = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i = \sum_{i \in J} \mu_i v_i$, und mindestens ein $j \in J$ mit $\lambda_j \neq \mu_j$. Aus $\sum_{i \in J} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$ folgt
$v_j = \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i - \mu_i}{\lambda_j - \mu_j} v_j$, also ist B verkürzbar. $\lightning$

iv) $\Rightarrow$ iii): Nach dem Lemma in §2.2b (S. V11) folgt, daß B linear unabhängig ist. Für jedes $w \in V$ gibt es eine endliche Darstellung $w = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. Also ist $B \cup (w)$ linear abhängig.

iii) $\Rightarrow$ i): Für jedes $w \in V$ ist $B \cup (w)$ linear abhängig, d.h. es gibt $\lambda_i, \mu \in K$ mit $\mu w + \sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$, wobei nur endlich viele $\lambda_i \neq 0$. Da B allein linear unabhängig ist, muß $\mu \neq 0$ sein. $\Rightarrow$ $w = -\sum_i \frac{\lambda_i}{\mu} v_i$
Somit ist $w \in \mathrm{span}(B)$. $\square$

Korollar 1: Ist V nicht endlich erzeugt, so gibt es eine unendliche linear unabhängige Familie in V.

Bew.: benutze iii) ⇒ i). Es gebe eine maximale lin. unabh. Familie $\mathcal{B}$ in V. Dann wäre $\mathcal{B}$ aber eine endliche Basis. ↯

Korollar 2: (Basisauswahlsatz)
Aus jedem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraums kann man eine Basis auswählen. Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis.

Bew.: Verkürze das anfängliche Erzeugendensystem, bis es minimal ist. Das ist in endlich vielen Schritten erreicht. □

Wir können auch in die andere Richtung vorgehen und eine linear unabhängige Familie erweitern:

Theorem: (Basisergänzungssatz)
Seien $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie in V und $(w_j)_{j\in J}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gibt es eine Indexmenge $S\subset J$, so daß $(v_i)_{i\in I}\cup(w_j)_{j\in S}$ eine Basis von V ist. (Die Wahl $S=\emptyset$ ist erlaubt.)

Bew.: hier nur für endliches Erzeugendensystem ($|J|<\infty$). Betrachte alle Indexmengen $S\subset J$, so daß $(v_i)_{i\in I} \cup (w_j)_{j\in S}$ linear unabhängig bleibt. Wir lassen auch $S=\emptyset$ zu, dies ist immer eine mögliche Auswahl, da (v_i) linear unabhängig ist.

Da J endlich ist, gibt es nur endlich viele mögliche Mengen S, darunter eine maximal lange Auswahl $S^*\subset J$. Wegen (iii) des letzten Satzes ist $(v_i)_{i\in I} \cup (w_j)_{j\in S^*}$ eine Basis von V.
Der unendliche Fall benötigt Konzepte aus der Mengenlehre, z.B. Totalordnung und das Zornsche Lemma. Siehe z.B. das Skript von Gubler (U Tübingen). $\square$

Korollar: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Bew.: Basisauswahlsatz mit $I=\emptyset$, d.h. aus einem beliebigen Erzeugendensystem können wir eine Basis auswählen. $\square$

d) Dimension

Wie können wir zwei Basen B_1 und B_2 desselben Vektorraums miteinander vergleichen? Überführe B_1 in B_2 durch sukzessives Austauschen von Vektoren.

Hier betrachten wir nur endlich erzeugte Vektorräume!

Lemma: (Austauschlemma, Ernst Steinitz, 1910)
Sei $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V, und sei $w=\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$ eine Linearkombination mit $\lambda_1 \neq 0$.
Dann ist $(w,v_2,\dots,v_n)$ auch eine Basis von V.

„v_1 kann gegen ein $w\in V$ ausgetauscht werden."

Bew.: i) Zeige, daß $(w,v_2,\dots,v_n)$ ein Erzeugendensystem ist:
Sei $u\in V$, dann gibt es $\mu_1,\dots,\mu_n\in K$ mit $u=\sum_{i=1}^n \mu_i v_i$.
Wegen $\lambda_1\neq 0$ gilt $v_1=\frac{1}{\lambda_1}w-\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1}v_i$, also

$$u=\frac{\mu_1}{\lambda_1}w+\sum_{i=2}^n\left(\mu_i-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)v_i \Rightarrow \text{Linearkombination von } (w,v_2,\dots,v_n)$$

ii) lineare Unabhängigkeit von $(w,v_2,\dots,v_n)$:
Sei $\mu w+\sum_{i=2}^n \mu_i v_i=0$. Einsetzen von $w=\sum_{i=1}^n\lambda_i v_i$:

$$\mu\lambda_1 v_1+\sum_{i=2}^n(\mu\lambda_i+\mu_i)v_i=0. \Rightarrow \mu\lambda_1=0,\ \mu\lambda_i+\mu_i=0$$

$(v_1,\dots,v_n)$ ist lin. unabhängig

Wegen $\lambda_1\neq 0$ ist $\mu=0 \Rightarrow \mu_i=0\ (2\le i\le n)$. □

Satz: (Austauschsatz)

Seien $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ ein Erzeugendensystem. Für $k = 0, 1, \dots, n$ gibt es k Indizes $S \subset J$, so daß $(w_j)_{j \in S} \cup (v_{k+1}, \dots, v_n)$ wieder eine Basis von V ist.

Bew: 1) folgt fast aus Basisergänzungssatz, da $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, aber Länge von $(w_j)_{j \in S}$ unklar.
2) daher: Induktion in k. Induktionsanfang $(k=0)$ ist trivial: $S = \emptyset$. Induktionsschritt: $k-1 \mapsto k$.
Sei $k \geq 1$, und die Behauptung sei richtig für $k-1$.
$\Rightarrow$ es gibt $k-1$ Indizes $T \subset J$, so daß $(w_j)_{j \in T} \cup (v_k, \dots, v_n)$ eine Basis ist. Für $\ell \in J$ gibt es $\lambda_i, \mu_j \in K$, so daß $w_\ell = \sum_{j \in T} \mu_j w_j + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i$. Insbesondere gibt es ein $\ell^* \in J \setminus T$ mit $\lambda_k \neq 0$, sonst wäre $(w_j)_{j \in T} \cup (v_{k+1}, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem ↯ Unverkürzbarkeit einer Basis.
$\Rightarrow$ ersetze v_k durch w_{ℓ^*} nach Austauschlemma, also gibt es das gesuchte $S = T \cup \{\ell^*\}$. □

Satz: In einem endlich erzeugten Vektorraum V gibt es eine endliche Basis, und alle Basen von V haben dieselbe Länge.

Bew.: Basisauswahlsatz $\Rightarrow$ in V existiert eine endliche Basis $B=(v_1,\dots,v_n)$. Sei $B'=(w_j)_{j\in J}$ eine beliebige Basis. Falls B' aus mindestens n Vektoren besteht, so gibt es nach dem Austauschsatz eine n-elementige Indexmenge $S\subset J$, so daß $(w_j)_{j\in S}$ eine Basis von V ist. Wegen der Unverkürzbarkeit von B' muß $|S|=|J|$ gelten. Falls $B'=(w_1,\dots,w_r)$ mit $r\leq n$, dann vertausche B und B', um $r=n$ zu schließen. $\square$

Def.: Sei V ein K-Vektorraum und B eine Basis von V. Als Dimension von V über K bezeichnen wir die Länge von B und schreiben dafür $\dim_K V$. Falls B unendlich ist, setzen wir $\dim_K V=\infty$.

Beispiele:

(1) K^n hat die kanonische Basis $(e_1,\dots,e_n)$, und damit ist $\dim_K K^n = n$.

(2) der Polynomring $K[t]$ hat die Basis $(t^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
$\Rightarrow \dim_K K[t]=\infty$.

(3) $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$, aber $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$

(4) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}=1$, aber $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\infty$

Ist $\{\sqrt{p}\mid p \text{ Primzahl}\}$ linear unabhängig?

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar, mit einer endlichen (oder abzählbaren) Basis B wäre $\text{span}_{\mathbb{Q}}(B)$ auch nur abzählbar $\lightning$

Proposition: In einem Vektorraum V mit Dimension $n < \infty$ bilden n linear unabhängige Vektoren immer eine Basis.

Bew.: Seien $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig. Nach Basis-ergänzungssatz können wir das zu einer Basis $(v_1, \dots, v_m)$ mit $m \geq n$ ergänzen. Nach dem letzten Satz folgt $m = n$. $\square$

Korollar: Sei $W \subset V$ Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt $\dim W \leq \dim V$.
Bei Gleichheit folgt $W = V$.

Bew.: Eine Basis von W ist auch eine linear unabhängige Familie in V, die zu einer Basis von V ergänzt werden kann. $\Rightarrow \dim W \leq \dim V$. Falls $\dim W = \dim V$, so ist eine Basis von W auch eine Basis von V $\Rightarrow W = V$. $\square$