3.2 Matrizenringe

Def.: Für $m\times n$-Matrizen über einem Körper K definieren wir Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise:

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) \quad \text{und} \quad \lambda A := (\lambda a_{ij})$$

für $A, B \in K^{m\times n}$ mit $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ und $\lambda \in K$.

Def.: Unter der Transposition einer Matrix $A=(a_{ij}) \in K^{m\times n}$ versteht man das Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindizes:

$A^T = (a'_{ij}) \in K^{n\times m}$ mit Einträgen $a'_{ij} = a_{ji}$.

(quadratische Matrizen: Spiegeln an der Diagonalen)

Bem.:

(1) Die $m\times n$-Matrizen $K^{m\times n}$ bilden einen K-Vektorraum.

$K^{m\times n} \cong K^{m\cdot n}$, also ist $\dim K^{m\times n} = m\cdot n$

(2) Für $A, B \in K^{m\times n}$, $\lambda \in K$ gilt:

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$, ii) $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$, iii) $(A^T)^T = A$.

Satz: Seien K ein Körper, $A, A' \in K^{m\times n}$, $B, B' \in K^{n\times r}$ und $C, C' \in K^{r\times s}$ Matrizen sowie $\lambda \in K$. Dann gilt:

(i) $A\cdot(B+B') = A\cdot B + A\cdot B'$ Distributivgesetze

$(A+A')\cdot B = A\cdot B + A'\cdot B$

(ii) $A\cdot(\lambda B) = (\lambda A)\cdot B = \lambda(A\cdot B)$ Homogenität

(iii) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ Assoziativität

(iv) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

(v) $\mathbb{1}_m\cdot A = A\cdot \mathbb{1}_n = A$ Neutralität der $\mathbb{1}$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ die $n\times n$- Einheitsmatrix.

Bew.: $A=(a_{ij})$, $A'=(a'_{ij})$, $B=(b_{ij})$ usw.

(i) $\sum_j a_{ij}(b_{jk}+b'_{jk}) = \sum_j (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}b'_{jk}) = \sum_j a_{ij}b_{jk} + \sum_j a_{ij}b'_{jk}$

zweiter Fall und (ii) analog.

(iii) $\sum_k \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{j,k} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk}c_{kl}\right)$

(iv)

$$\underbrace{[(A\cdot B)^T]_{ij}}_{\text{Eintrag } i,j} = [A\cdot B]_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k [A^T]_{kj}[B^T]_{ik}$$
$$= [B^T\cdot A^T]_{ij}$$

(v) $[\mathbb{1}_m\cdot A]_{ik} = \underbrace{\sum_{j=1}^m \delta_{ij}\cdot a_{jk}}_{\text{ersetze im Summanden } j \text{ durch } i} = a_{ik}$, $[A\cdot\mathbb{1}_n]_{ik} = \dots = a_{ik}$ □

Bem.:

(3) Mit Hilfe des Kroneckersymbols $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$
können wir schreiben: $\mathbb{1}_n = (\delta_{ij})$.

(4) Die quadratischen Matrizen $K^{n\times n}$ mit komponentenweiser Addition und der Multiplikation wie in §3.1b bilden einen Ring. (Zum Körper fehlen Kommutativität und Division also das Inverse A^{-1} für alle $A\in K^{n\times n}$.)

(5) Es gilt im allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$, andernfalls sagen wir: „A und B vertauschen (kommutieren)".

(6) in $K^{n \times n}$ gibt es Nullteiler: VL #12

Aus $A \cdot B = 0$ folgt nicht $A = 0$ oder $B = 0$.

Man darf $\cancel{A} \cdot B = \cancel{A} \cdot C$ i.a. nicht „kürzen".

Bsp.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Def.: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt Nullteiler, falls es ein $B \in K^{n \times n}$, $B \neq 0$, gibt, so daß $A \cdot B = 0$ oder $B \cdot A = 0$.

Def.: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es ein $A' \in K^{n \times n}$ gibt, so daß $A \cdot A' = A' \cdot A = \mathbb{1}_n$ gilt.
Die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen wird als allgemeine lineare Gruppe $GL(n, K)$ bezeichnet.
general linear group

Bem.:

(7) $GL(n,K)$ mit dem Matrixprodukt ist eine Gruppe

Bew.: i) Das Matrixprodukt ist assoziativ mit $\mathbb{1}_n \in GL(n,K)$ als neutralem Element. ii) Eine zu $A \in GL(n,K)$ inverse Matrix ist ebenfalls invertierbar. $\Rightarrow A^{-1} \in GL(n,K)$
iii) für $A, B \in GL(n,K)$: $(B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1}}_{\text{"}})(A \cdot B) = \mathbb{1}_n \Rightarrow \underbrace{A \cdot B}_{\text{invertierbar}} \in GL(n,K)$ □

(8) für $n\times n$-Matrizen gilt: ein Rechtsnullteiler ist gleichzeitig Linksnullteiler, also aus $A\cdot B = 0$, $B\neq 0$ folgt, daß es ein $B' \in K^{n\times n}$ gibt mit $B'\cdot A = 0$, $B'\neq 0$.

(ohne Beweis, benutze:

A ist (Rechts-)nullteiler $\Leftrightarrow \det A = 0$)

(9) ein Nullteiler ist nicht invertierbar.

Bew.: Sei $A\cdot B = 0$, $B\neq 0$ und $A^{-1}\cdot A = \mathbb{1}$. Dann folgt: $B = \underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{\mathbb{1}}\cdot B = A^{-1}\cdot \underbrace{(A\cdot B)}_{0} = 0$ ↯ □

Satz: Eine $n\times n$-Matrix ist entweder Nullteiler oder invertierbar.

Bew.: später (Dimensionsformel für Endomorphismen).

- Nullteiler $\Rightarrow$ nicht invertierbar, siehe (9).
- nicht invertierbar $\Rightarrow$ $\operatorname{rang} A < n \Rightarrow$ es gibt $b\in K^n$, $b\neq 0$ mit $Ab = 0$. Wähle $B = (b, \ldots, b) \in K^{n\times n}$, dann ist $B\neq 0$, aber $AB = 0$. A ist Nullteiler. □