3.3 Das Eliminationsverfahren nach Gauß

a) Rang einer Matrix

Def.: Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in K^m$. Dann heißt $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_n)$ der Spaltenraum von A, und seine Dimension heißt (Spalten-)rang von A:

$$\operatorname{rang} A := \dim \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n).$$

Bem.:

(1) Der Rang einer Matrix gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten an.

(2) Beispiele:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{rang} \mathbb{1}_n = n$$

(3) analog definiert man den Zeilenrang von A als $\operatorname{rang}(A^T)$, also die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen.

Satz: Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ gilt: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

„Zeilenrang = Spaltenrang"

<u>Bew.:</u> Seien $r = \operatorname{rang} A$ (Spaltenrang) und

$\tilde{r} = \operatorname{rang} A^T$ (Zeilenrang). Wir zeigen zunächst: $\tilde{r} \leq r$.

A habe Spalten $(w_1, \dots, w_n)$ mit $w_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $1 \leq j \leq n$.

Sei $W := \operatorname{span}(w_1, \dots, w_n) \subset K^m$, und

sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von W. $[r = \dim W]$

Dann gibt es $\lambda_{jk} \in K$, so daß $w_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{jk} v_k$.

Also: $a_{ij} = \sum_k \lambda_{jk} v_{ik}$, wobei $v_k =: \begin{pmatrix} v_{1k} \\ \vdots \\ v_{mk} \end{pmatrix}$.

Für die Zeilen $(z_1, \dots, z_m)$ von A gilt damit:

$$z_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = \sum_{k=1}^{r} v_{ik} u_k \quad \text{mit } u_k := (\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{nk}) \subset K^n.$$

$\Rightarrow$ $z_i \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_r)$ und $\tilde{r} = \dim \operatorname{span}(z_1, \dots, z_m) \leq r$.

Anwendung desselben Arguments für A^T $\Rightarrow$ $r \leq \tilde{r}$.

Damit folgt $r = \tilde{r}$. $\square$

Nachtrag: Kern des Beweises ist die Darstellung

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{jk} v_{ik}$, welche an ein Matrixprodukt erinnert.

In der Tat: $A = V \cdot \Lambda^T$ und $A^T = \Lambda \cdot V^T$ mit

$$V = \underset{\uparrow \text{ Spalten}}{(v_1, \dots, v_r)} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mr} \end{pmatrix} \in K^{m \times r}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nr} \end{pmatrix} = \underset{\uparrow \text{ Spalten}}{(u_1, \dots, u_r)} \in K^{n \times r}$$

b) Zeilenstufenform

Def.: Hat eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ die Form

Pivot

$$A = \begin{pmatrix} & \circledast & & & * \\ & & \circledast & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \circledast \end{pmatrix}, \quad \left.\right\} r \text{ Zeilen}$$

$$\qquad\qquad j_1 \qquad j_2 \qquad j_r$$

dann heißt A in Zeilenstufenform, genauer wenn gilt:

i) die ersten r Zeilen enthalten Einträge $\neq 0$, in den Zeilen $r+1$ bis m stehen nur Nullen $(0 \leq r \leq m)$.

ii) zu jeder Zeile $1 \leq i \leq r$ gibt es einen Pivotindex

$$j_i := \min \{ j \mid a_{ij} \neq 0 \} \quad \text{mit} \quad 1 \leq j_i \leq n,$$

und es gilt $\quad j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. (Stufenbedingung)

Für die Pivoteinträge gilt also $a_{ij_i} \neq 0$, und

$a_{ik} = 0$ für $1 \leq k < j_i$.

Bem.:

(1) Durch Vertauschen der Spalten von A, kann man erreichen, daß $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$. Dann liegen die Pivots $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ auf der Diagonalen.

→ Umnummerierung der $x_1, \ldots, x_n$

(2) $\operatorname{rang} A = r$, da $\operatorname{rang} A \geq r$, aber $\operatorname{rang} A^T \leq r$.

Bsp.:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

○ Pivots

(3) Im folgenden sei $A \in K^{m \times n}$ in Zeilenstufenform mit Pivots $a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0$. Für $b \in K^m$ betrachten wir das LGS $Ax = b$, $x \in K^n$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist von der Form:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & * & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & a_{rr} & b_r \\ \hline & 0 & & & b_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_m \end{array}\right)$$

Gesucht ist die Lösungsmenge $\text{Lös}(A,b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$.

(4) Gibt es ein $b_i \neq 0$ mit $r+1 \leq i \leq m$, so ist $\text{Lös}(A,b) = \emptyset$.

VL #13

(5) Konstruktion einer Lösung für $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$.

i) für $r < n$ hat die Lösung $k := n - r$ Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$. Wähle $x_{r+1}, \dots, x_n$ als freie Variable und setze $x_{r+i} = \lambda_i$ für $i = 1, \dots, k$.

ii) die Lösungen für $x_1, \dots, x_r$ erhält man durch Einsetzen in das LGS von unten nach oben:

$$a_{rr} x_r + a_{r,r+1} \lambda_1 + \dots + a_{r,r+k} \lambda_k = b_r$$

$$(a_{rr} \neq 0) \Rightarrow x_r = \frac{b_r}{a_{rr}} - \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{r,r+j}}{a_{rr}} \lambda_j. \qquad (*)$$

allgemein:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=i+1}^{r} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i,r+j}}{a_{ii}} \lambda_j, \quad 1 \leq i < r. \qquad (**)$$

$\Rightarrow$ x_i ist durch $x_{i+1}, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ bestimmt.

(6) Beispiel:

$$(A|b) = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}$$
$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad n=4,\ r=3$$

$\text{rang}(A|b) = \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow k=1$ Parameter λ

$$x_4 = \lambda$$
$$x_3 = 2 - 6\lambda$$
$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\underbrace{(2-6\lambda)}_{x_3} - \frac{8}{2}\lambda = -\frac{9}{2} + 11\lambda$$
$$x_1 = 0 - \frac{4}{3}\underbrace{\left(-\frac{9}{2} + 11\lambda\right)}_{x_2} - \frac{7}{3}\underbrace{(2-6\lambda)}_{x_3} - 0 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lös}(A|b) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 4/3 \\ -9/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v_0} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: u} \right\} = v_0 + \text{span}(u)$$

$v_0 = \phi(0)$

(7) Unter der Lösung des LGS verstehen wir eine Abbildung

$$\phi : K^k \to \text{Lös}(A,b) \subset K^n$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto (x_1, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Diese Abbildung ist durch $(*)$ und $(**)$ eindeutig bestimmt.

(8) für eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit vollem Rang $(r = n)$ ist $k = 0$.

$\Rightarrow$ es gibt nur eine einzige Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$

Ist zusätzlich $b = 0$, so folgt $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

(9) $Lös(A, b)$ ist kein Vektorraum (außer für $b = 0$), sondern ein affiner Unterraum von K^n der Dimension $k = n - r$. ($\nearrow$ §4.1)

c) elementare Zeilenumformungen

Wie können wir ein beliebiges LGS auf Zeilenstufenform bringen?

$\Rightarrow$ elementare Zeilenumformungen von $(A|b)$:

a) Vertauschung von zwei Zeilen

b) Addition des λ-fachen der Zeile i zur Zeile k, wobei $\lambda \neq 0$ und $i \neq k$.

<u>Satz:</u> Sei $(\tilde{A}|\tilde{b})$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen aus $(A|b)$ entstanden. Dann ist $Lös(\tilde{A}, \tilde{b}) = Lös(A, b)$.

<u>Bem.:</u> Vertauschen von Spalten in A ist ebenfalls erlaubt. (Umnummerierung der $x_1, \ldots, x_n$)

Ebenso Multiplikation einer Zeile mit $\mu \neq 0$. $\leftarrow$ kann rückgängig gemacht werden

Bew.: Lös(A,b) ist invariant unter Vertauschung von Zeilen [Typ (a)], Reihenfolge der Gleichungen ist unwesentlich. Zu zeigen: Lös(A,b) ist invariant unter einer einzigen Umformung vom Typ (B):
es genügt zu zeigen, daß die zwei Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k \tag{2}$$

denselben Lösungsraum haben wie

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{kj}+\lambda a_{ij})x_j = b_k + \lambda b_i . \tag{2'}$$

Erfüllt ein $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ die Gl. $(1,2)$, so auch $(1,2')$.
(addieren der Konstanten λb_i auf beiden Seiten von (1).)
Umgekehrt folgt Gl. (2) aus $(2')-\lambda\cdot(1)$. $\square$

Satz: Jede Matrix A läßt sich durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform überführen.

Bew.: Eliminationsverfahren nach Gauß.

d) Der gaußsche Algorithmus

Ziel: bringe eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ auf Zeilenstufenform.

Verfahren:

Sei $A \neq 0$. Andernfalls hat A bereits Zeilenstufenform

1) Suche erste Spalte $\neq 0$:

$$\ell := \min\{ j \mid a_{ij} \neq 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq m \}$$

2) Wähle das betragsmäßig größte Element $a_{k\ell} \neq 0$ als Pivot: $|a_{i\ell}| \leq |a_{k\ell}|$ für $1 \leq i \leq m$.

3) Vertausche Zeilen 1 und k $\Rightarrow$ Pivot ist in $\tilde{a}_{1\ell}$ (neue Matrix)

4) „Ausräumen" der restlichen Spalte:
addiere ein λ_i-faches der Zeile 1 zu jeder Zeile $2 \leq i \leq m$, so daß $\tilde{a}_{i\ell} = 0$ für $i \geq 2$.

$$\lambda_i = -\frac{a_{i\ell}}{\tilde{a}_{1\ell}} \qquad \left(\tilde{a}_{ij} = \lambda_i \tilde{a}_{1j} + a_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n \right)$$

Ergebnis:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1\ell} & * & \cdots & * \\ \hline \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

5) Wiederhole Verfahren mit der $(m-1) \times (n-\ell)$-Matrix A', falls $A' \neq 0$ und $m > 1$, $n > \ell$.

Die Iteration bricht ab, da $m, n < \infty$ und $\ell \geq 1$.

Endergebnis: $\tilde{A}$ ist in Zeilenstufenform. $\square$

Bem.:

(1) durch zusätzliche Spaltenvertauschungen läßt sich erreichen, daß die Pivots auf der Diagonalen stehen.
$\rightarrow$ Buchführung über die Vertauschungen notwendig, da sich die Reihenfolge der $x_1, \dots, x_n$ ändert

(2) für gute numerische Stabilität müssen die Pivots möglichst verschieden von Null sein
$\Rightarrow$ „vollständige Pivotisierung": ersetze 1) – 3) durch:

1') finde k, l, so daß $|a_{ij}| \leq |a_{kl}|$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$
(Pivot ist betragsmäßig größtes Element in A)

2') Vertausche Spalten 1 und l.

3') Vertausche Zeilen 1 und k. $\rightarrow$ Pivot in $\tilde{a}_{11}$

Zusammenfassung: (Eliminationsverfahren nach Gauß)

Lösen eines linearen Gleichungssystems aus m Gleichungen und n Unbekannten:

1) stelle erweiterte Koeffizientenmatrix auf: $(A|b) \in K^{m \times (n+1)}$
2) bringe A auf Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen von $(A|b)$. Ergebnis: $(\tilde{A}|\tilde{b})$
3) lies $r = \operatorname{rang} \tilde{A}$ ab;
$\text{Lös}(A,b) = \emptyset$, falls $r \neq \operatorname{rang}(\tilde{A}|\tilde{b})$
4) berechne Lösung $\phi: K^{n-r} \rightarrow \text{Lös}(\tilde{A},\tilde{b}) = \text{Lös}(A,b) \subset K^n$

Beispiel:
$$\begin{aligned} 2x + 6y - 2z &= 2 \\ 3x + 8y - 2z &= 3 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

1)
$$(A|b) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array}$$

○ maximales Element in A

2) tausche $x \leftrightarrow y$ und Zeilen 1 und 2:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ -\frac{3}{4}\cdot(\mathrm{I}) \\ -\frac{1}{4}\cdot(\mathrm{I}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \leftarrow \text{fertig}$$

fertig

neues Pivot
(hier ignorieren)

• (4):
$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} x & z \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ -\frac{-1}{1}\cdot(\mathrm{I}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \end{array}\right)$$

0-Matrix

Ergebnis:
$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \} \; b_3 = 0$$

3) $\operatorname{rang} \tilde{A} = 2 = \operatorname{rang}(\tilde{A}|\tilde{b})$

$\Rightarrow$ es gibt eine Lösung mit $3-2=1$ Parameter

4) Einsetzen: $z = \lambda$, $x = 1 - 2\lambda$, $y = \frac{3}{8} - \frac{-2}{8}\lambda - \frac{3}{8}\overbrace{(1-2\lambda)}^{x}$
$= \lambda$

$$\Rightarrow \Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Lös}(A, b) = \Phi(\mathbb{R}).$$