## 5.2 Existenz und Eindeutigkeit

### a) Eindeutigkeit

**Satz:** Zu jedem $n \geq 1$ gibt es genau eine Determinante $\det : K^{n\times n} \to K$.

**Bew.:** Sei $\det' : K^{n\times n} \to K$ auch eine Determinante.
Zu zeigen: für alle $A \in K^{n\times n}$ ist $\det A = \det' A$.
Ist $\operatorname{rang} A < n$, so ist $\det A = 0 = \det' A$. Sei also $A \in GL(n;K)$, dann gibt es Elementarmatrizen $C_1, \dots, C_s$ mit $A = \prod_{j=1}^{s} C_j$.
Die Sätze 5.1b,c folgen aus den Axiomen (D1) – (D3), gelten gleichermaßen für det und det'. Für Dreiecksmatrizen stimmen det und det' überein, also $\det C_j = \det' C_j$ für alle $j$. Multiplikationssatz:

$$\det A = \det\Big(\prod_j C_j\Big) = \prod_j \det C_j = \prod_j \det' C_j$$
$$= \det'\Big(\prod_j C_j\Big) = \det' A.$$

$\square$

## b) Entwicklungssatz von Laplace

Zum Beweis der Existenz genügt es, für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Determinantenformel anzugeben. Wir verwenden vollständige Induktion. Schreibweise: $\det_n : K^{n\times n} \to K$.

(1) Induktionsanfang: det existiert für $n=1$: $\det_1(a) = a$.
(2) Induktionsannahme:
Wir kennen $\det_{n-1}$ für $(n-1)\times(n-1)$ - Matrizen.
(3) Induktionsbehauptung: $\det_n$ existiert, $\det_n = \ldots$

Satz: (Laplace)
Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und bezeichne $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die aus A durch Streichen der Zeile $i$ und der Spalte $j$ entstehende Streichungsmatrix. Wähle eine Spalte $1 \le j \le n$. Dann erklärt

$$\det_n A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det_{n-1} A_{ij}$$

die Determinante $\det_n : K^{n\times n} \to K$.
Vorzeichenregel:

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & \\ + & - & & \ddots \end{pmatrix}$$

Schachbrettmuster

**Bem.:** das Ergebnis hängt nicht von $j$ ab. (Eindeutigkeit!)

**Bsp.:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det A_{23} = 1 \cdot 8 - 7 \cdot 2 \qquad \text{(Entwicklung nach Spalte 1).}$$

$$\det A = +1 \cdot |A_{11}| - 4 \cdot |A_{21}| + 7 \cdot |A_{31}|$$

$$= +1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) + 7 \cdot (-3) = 0$$

**Bew.:** Wir müssen zeigen, daß $\det_n$ die Eigenschaften (D1) – (D3) hat.

- multilinear (D1): Schreibe $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Zeige, daß $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$ linear in $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ ist für alle $i, j$. Sei $k = i$, dann hängt $A_{ij}$ nicht von $a_k$ ab, und $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_{kj}$ ist linear in $a_k$.
Für $k \neq i$ ist $a_{ij}$ bezüglich $a_k$ konstant, und wir verwenden, daß $\det_{n-1}$ multilinear ist.
- alternierend (D2): sei $a_k = a_\ell$, dann ist $|A_{ij}| \neq 0$ nur für $i = k, \ell$. Aber $A_{kj}$ und $A_{\ell j}$ können durch $s = |\ell - k| - 1$ Zeilenvertauschungen ineinander überführt werden: $A_{kj} = \begin{pmatrix} \cancel{a_k} \\ a_\ell \end{pmatrix}$, $A_{\ell j} = \begin{pmatrix} a_k \\ \cancel{a_\ell} \end{pmatrix}$.

Sei $k < \ell$, dann ist $|A_{\ell j}| = (-1)^{\ell - k - 1} |A_{kj}|$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\det_n A &= \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij}\,|A_{ij}| \\ &= (-1)^{k+j} a_{kj}\,|A_{kj}| + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j}\,\overbrace{|A_{\ell j}|}^{(-1)^{\ell-k-1}|A_{kj}|} \\ &= (-1)^{k+j}(a_{kj}-a_{\ell j})\,|A_{kj}| \\ &= 0\end{aligned}$$

$(-1)^{2\ell+j-k-1} = -(-1)^{k+j}$

• normiert (D3): wähle $j=1$.

$$\det_n 1\!\!1_n = (-1)^{1+1}\, 1 \cdot \underbrace{|1\!\!1_{n-1}|}_{1} = 1 .$$

$\square$

<u>Satz:</u> Es gilt $\det A = \det A^T$ für alle $A \in K^{n\times n}$.

↑ transponierte Matrix

<u>Bew.:</u> Wir zeigen, daß $A \mapsto \det A^T$ eine Determinante ist.

(D1) $\Leftrightarrow$ $\det A$ ist linear in jeder <u>Spalte</u> $1\le j\le n$.
folgt aus Laplace-Formel, da die Spalte $j$ in $A_{ij}$ gestrichen wurde.

(D2): Sei $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$ mit $a_k = a_\ell$. $\Rightarrow$ $\operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A < n$.
Nach §5.1b(iv) folgt $\det A^T = 0$.

(D3): klar, da $1\!\!1 = 1\!\!1^T$. $\square$

<u>Korollar:</u> Die Formel von Laplace gilt auch bei Entwicklung nach einer Zeile:

$$(*) \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{für } 1\le i\le n \text{ fest.}$$

## c) Formel für die inverse Matrix



<u>Def.:</u> Sei $A \in K^{n\times n}$ und bezeichne $A_{ij}$ die Streichungsmatrix von $A$ bezüglich Zeile $i$ und Spalte $j$. Dann heißt $A^\# = (a_{ij}^\#) \in K^{n\times n}$ mit $a_{ij}^\# = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ die zu $A$ **komplementäre Matrix**.

vertauscht!

<u>Satz:</u> Ist $A^\#$ die zu $A$ komplementäre Matrix, so gilt: $A^\# A = (\det A)\, \mathbb{1}_n$. Für $A \in GL(n;K)$ folgt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\#.$$

<u>Bew.:</u> Sei $a_j \in K$ die Spalten von $A = (a_1, \dots, a_n)$. Dann ist $\det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

$$(A^\# A)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^\# a_{kj} = \sum_k (-1)^{i+k} a_{kj} \det A_{ki}$$

$$= \sum_k a_{kj} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_k, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\overset{(D1)}{=} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \underbrace{\sum_k a_{kj} e_k}_{a_j}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\overset{(D2)}{=} \delta_{ij} \det A \qquad \square$$

<u>Bsp:</u>

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rechenaufwand: $n^2$ Determinanten $\Rightarrow$ kleine $n$!