5.4 Orientierung

Def.: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und Basis $\mathcal{B}$. Wir definieren die Determinante der Endomorphismen auf V als

$$\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \det f := \det M_{\mathcal{B}}(f).$$

darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$

Ein Automorphismus $f: V \to V$ heißt orientierungstreu, falls $\det f > 0$.

↳ K muß ein geordneter Körper sein, $K = \mathbb{R}$.

Bem.:

(1) die Definition ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$

(2) für $f \in \mathrm{End}(V)$ gilt: f bijektiv $\Leftrightarrow$ $\det f \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} f \text{ bijektiv} & \Leftrightarrow & \det f \neq 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ f \text{ surjektiv} & \Leftrightarrow & \operatorname{rang} f = n \end{array}$$

Def.: Eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ heißt positiv orientiert, falls $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$.
Zwei Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ eines Vektorraums V heißen gleichorientiert, falls der durch $f(v_i) = w_i$, $1 \le i \le n$, bestimmte Automorphismus f orientierungstreu ist.

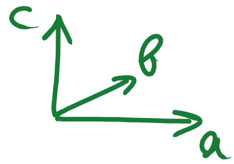
<u>Bem.:</u>

(3) die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist positiv orientiert:

$\det(e_1,\dots,e_n) = \det \mathbb{1}_n = 1.$

(4) Im $\mathbb{R}^3$ gilt die Rechte-Hand-Regel:

Für $a,b\in\mathbb{R}^3$ linear unabhängig ist



(a,b,c) mit $c:=a\times b$ positiv orientiert.

Bew.: $\det(a,b,c) = (a\times b)\cdot(a\times b) = \|a\times b\|^2 \geq 0.$

Bsp.: $e_3 = e_1\times e_2$, dann ist $\det(e_1,e_2,e_3) = 1$

(5) Beispiele für Automorphismen:

- Drehungen ($\det f = 1$) sind orientierungstreu
- Spiegelungen ($\det f = -1$) nicht