6.4 Dualität

a) Dualraum

Erinnerung: Zu einem K-Vektorraum V ist $\mathrm{Hom}(V, K) = \{f: V \to K \text{ linear}\}$ ein Untervektorraum von K^V. Wie hängt $f(v)$ für festes v von f ab?

Def.: Zu einem K-Vektorraum V definieren wir den Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{f: V \to K \text{ linear}\}$, die Elemente von V^* heißen lineare Funktionale auf V.

Bem.:

(1) Sei $V = \mathbb{R}^n$. Zu jeder Spalte $a \in \mathbb{R}^n$ ist
$\varphi_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi_a(x) = a^T x$, linear.
Also $\varphi_a \in (\mathbb{R}^n)^*$. Umgekehrt lassen sich alle linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^n$ so schreiben.
Also ist $(\mathbb{R}^n)^* = \{\varphi_a \mid a \in \mathbb{R}^n\}$.

(2) Sei $\dim V < \infty$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V.
Dann gibt es zu jedem $i = 1, \dots, n$ genau eine lineare Abbildung $v_i^* \in V^*$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, n$.

$\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^* und heißt die zu $\mathcal{B}$ duale Basis. Insbesondere ist
$\dim V^* = \dim V$. (gilt nicht für $\dim V = \infty$)

Bew.: zu zeigen: zu jedem $f \in V^*$ gibt es eindeutige $\lambda_i \in K$ mit $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*$.

$\varphi(v_j) \overset{1}{=} \sum_i \lambda_i v_i^*(v_j) = \lambda_j$. $\square$

[1] punktweise Verknüpfungen in $\mathrm{Hom}(V, K)$.

(3) Folgerung: Zu jeder Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt es einen Isomorphismus $\Psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ mit
$$\Psi_{\mathcal{B}}(v_i) = v_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

(4) Sind $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis, so ist $v_i^* = \langle v_i , \cdot \rangle$.

Bew.: Bilder der Basisvektoren: $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle \ \forall j$. $\square$

Satz: (Frechet, Riesz, 1907)
Sei V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Die Abbildung
$$\Psi : V \to V^* : v \mapsto \psi_v := \langle v , \cdot \rangle$$
ist (semi-)linear und bijektiv. Insbesondere gibt es zu $\psi \in V^*$ genau ein $v \in V$ mit $\psi(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$.
(Gilt auch für Hilberträume mit $\dim V = \infty$.)

Bew.: Semilinearität überträgt sich von $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$\Psi(v+\lambda v') = \langle v+\lambda v', \cdot\rangle = \langle v,\cdot\rangle + \overline{\lambda}\langle v',\cdot\rangle = \Psi(v) + \overline{\lambda}\,\Psi(v')$.

- Injektivität: Sei $u,v\in V$ mit $\varphi_u = \varphi_v$, d.h. $\langle u,w\rangle = \langle v,w\rangle$ für alle $w\in V \Rightarrow u-v\in V^\perp = \{0\}$, also $u=v$.
- Surjektivität: Sei $(v_1,\dots,v_n)$ eine Orthonormalbasis von V mit Dualbasis $(v_1^*,\dots,v_n^*)$. Dann gibt es zu $\varphi\in V^*$ eindeutige $\lambda_i\in\mathbb{C}$ mit $\varphi = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i}\, v_i^*$. (Basis von V^*)

$\Leftrightarrow \quad \varphi(v_j) = \sum_i \overline{\lambda_i}\, \underbrace{v_i^*(v_j)}_{\delta_{ij}} = \overline{\lambda_j}$ für alle $j=1,\dots,n$ (v_j) ist Basis von V.

Für $\varphi(\cdot) = \langle v,\cdot\rangle$ ist das äquivalent zu $\langle v, v_j\rangle = \overline{\lambda_j}$, $j=1,\dots,n \Leftrightarrow v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \in V$. (v_j) ist ONB von V.

Also existiert v für jedes φ und ist eindeutig festgelegt.

$\square$

Bem.:

(5) die Abbildung Ψ ist der kanonische (semi-) Isomorphismus zwischen V und V^*.

(6) Beispiel $V=\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = x^T y$. Dann ist

$$\varphi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad y\mapsto x^T y.$$

Dualisieren heißt im $\mathbb{R}^n$ transponieren: $\varphi_x = x^T$.

b) duale Abbildung

Betrachte das Diagramm linearer Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "V^* \ni \varphi\circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi\in W^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

<u>Def.:</u> Sei $f: V \to W$ linear. Die zu f **duale Abbildung** ist definiert als

$$f^*: W^* \to V^*, \quad \varphi \mapsto f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

f transportiert Vektoren, f^* lineare Funktionale.

<u>Bem.:</u>

(1) Für alle $v \in V, \varphi \in W^*$ gilt also: $\varphi(f(v)) = f^*(\varphi)(v)$

(2) Die duale Abbildung ist linear.

Bew.: $f^*(\varphi+\lambda\varphi')(v) = (\varphi+\lambda\varphi')(f(v)) = \varphi(f(v)) + \lambda\varphi'(f(v))$
$= f^*(\varphi)(v) + \lambda f^*(\varphi')(v)$ $\square$

(3) Ist W ein Skalarproduktraum, so gilt für $w \in W$:
$\varphi_w := \langle w, \cdot \rangle \in W^*$:
$f^*(\varphi_w)(v) = \varphi_w(f(v)) = \langle w, f(v)\rangle$ für alle $v \in V$.

(4) Ist auch auf V ein Skalarprodukt definiert, so gibt es nach dem Satz von Riesz zu $f^*(\varphi_w) \in V^*$ ein eindeutiges $\tilde{v} \in V$ mit

$$f^*(\varphi_w) = \langle \tilde{v}, \cdot \rangle. \qquad = \Psi(\tilde{v})$$

Wir haben also eine Abbildung $f^+ : W \to V,\ w \mapsto \tilde{v}$ mit $\langle f^+(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle$.

c) adjungierte Abbildung

<u>Def.:</u> Sei $f: V \to W$ linear. Die lineare Abbildung $f^+ : W \to V$ mit $\langle f^+(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle$ für alle $v \in V, w \in W$ heißt die zu f **adjungierte Abbildung**.

<u>Bem.:</u>

(1) Sind Ψ und Φ die kanonischen Isomorphismen zwischen V und V^* bzw. W und W^*, $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, und f^* bzw. f^+ die duale bzw. adjungierte Abbildung, so gilt ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Psi"', "\cong"] & W \arrow[l, "f^+"'] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

„f^+ ist die nach V,W zurückgeholte duale Abbildung f^*."

Bew.: Sei $w \in W$. $\Phi(w) = \langle w, \cdot \rangle \in W^*$.

$$f^*(\Phi(w)) = \langle w, f(\cdot)\rangle = \langle f^+(w), \cdot \rangle = \Psi(f^+(w))$$

$\square$

(2) $f^+ : W \to V$ ist linear.

Bew.: $f^+ = \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi$ ist eine Komposition (semi-) linearer Abbildungen. Das „semi" von Ψ und Φ kompensiert sich. $\square$

Satz: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Orthonormalbasen von V bzw. W, dann gilt für jedes $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f^+) = \left(\overline{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)}\right)^T.$$

$K = \mathbb{C}$.

„Die Matrix der adjungierten Abbildung ist die Transponierte."

Bew.: Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ sowie $A = (a_{ij}) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $B = (b_{ij}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f^+)$. Dann gilt:

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k, \quad f^+(w_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v_k$$

für alle $1 \le i \le n$ und $1 \le j \le m$. Skalarprodukte:

$$\langle w_j, f(v_i)\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \langle w_j, w_k\rangle \overset{(*)}{=} a_{ji}$$

$$\langle f^+(w_j), v_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle b_{kj} v_k, v_i\rangle \overset{(*)}{=} \overline{b_{ij}}$$

(*) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind orthonormal

Beide Zeilen stimmen überein $\Rightarrow$ $a_{ji} = \overline{b_{ij}}$ oder $A = \overline{B}^T$.

$\square$

Satz: Für $f: V \to W$ linear gilt: $\operatorname{im} f^+ = (\ker f)^\perp$ und $\ker f^+ = (\operatorname{im} f)^\perp$. Insbesondere hat man die orthogonalen Zerlegungen $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f^+$ und $W = \ker f^+ \oplus \operatorname{im} f$.

↖ direkte Summe orthogonaler Untervektorräume

Bew.: $w \in (\operatorname{im} f)^\perp \Leftrightarrow 0 = \langle w, f(v)\rangle$ für alle $v \in V$.
$\Leftrightarrow 0 = \langle f^+(w), v\rangle \ \forall v \in V \Leftrightarrow f^+(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \ker f^+$.
Analog die erste Relation: $v \in (\operatorname{im} f^+)^\perp \Leftrightarrow v \in \ker f$. $\square$

Def.: Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ auf einem euklidischen oder unitären Vektorraum V heißt selbstadjungiert, falls $f^+ = f$. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt symmetrisch bzw. hermitesch, falls $A = A^T$ $(K = \mathbb{R})$ bzw. $A = \overline{A}^T$ $(K = \mathbb{C})$.

Bem.:

(3) Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis, so gilt
f selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(f)$ ist symmetrisch/hermitesch.

(4) eine notwendige Bedingung für $f \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert ist $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

(5) Eine Projektion $P: V \to V$ ist genau dann orthogonal, d.h. $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$, wenn sie selbstadjungiert ist.

Bew.: aus (4) folgt: orthogonal $\Leftarrow$ selbstadjungiert.

$\Rightarrow$: Sei $U = \operatorname{im} P$, dann ist $U^\perp = \ker P$.

Für $v, v' \in V = U \oplus U^\perp$ mit $v = u + w$, $v' = \underset{\in U}{u'} + \underset{\in U^\perp}{w'}$ gilt:

$$\langle P(v), v' \rangle = \langle P(u) + \cancel{P(w)}^{\,0}, u' + w' \rangle \qquad P(u) \perp w'$$

$$= \langle P(u), u' \rangle = \langle u, P(u') \rangle \qquad P|_U = \mathrm{id}_U$$

$$= \ldots = \langle v, P(v') \rangle \quad \Rightarrow P^\dagger = P \qquad \square$$

d) Bra-Ket-Notation

Schreibweise aus der Physik, die für uns „arbeitet“:

(1) Sei V ein Hilbertraum. Dann bezeichnen wir:

Vektoren $|v\rangle \in V$ als „ket“,

lineare Funktionale $\langle v| \in V^*$ als „bra“.

Die duale Basis erfüllt $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots$

(2) Satz von Riesz: $\underset{\overset{\shortparallel}{v \in V}}{|v\rangle} \mapsto \underset{\overset{\shortparallel}{\varphi_v \in V^*}}{\langle v|} = \langle v, \cdot \rangle$ ist bijektiv

Skalarprodukt

Skalarprodukt: $\langle v | w \rangle = \varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$

(semilinear in v, linear in w)

(3) ist $|u_1\rangle, \dots |u_m\rangle$ eine Orthonormalbasis von $U \subset V$, dann lautet der orthogonale Projektor auf U:

$$P = \sum_{i=1}^{m} |u_i\rangle\langle u_i|$$

vgl. § 6.2.b(6)

$$Pv = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, v\rangle u_i$$

(4) für $U=V$ erhalten wir eine Darstellung der Identität:

$$\boxed{id_V = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i|}$$

für eine Orthonormalbasis $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots$

(5) daraus folgt die Koordinatendarstellung eines Vektors:

$$|v\rangle = \underbrace{\sum_i |v_i\rangle\langle v_i|}_{id} v\rangle \in V$$

$$= \sum_i \lambda_i |v_i\rangle \, , \; \lambda_i = \langle v_i|v\rangle$$

vgl. § 6.2a (3)

$$v = \sum_i \langle v_i, v\rangle v_i$$

(6) Für einen Endomorphismus $F \in End(V)$ haben wir die darstellende Matrix bezüglich der ONB $(|v_i\rangle)$:

$$F|v_j\rangle = \sum_i |v_i\rangle \underline{\langle v_i|F|v_j\rangle}$$

vgl. § 4.3c

$$f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$$

$$\Rightarrow \quad M(F) = \left(\langle v_i|F|v_j\rangle\right)_{ij}$$ Matrixelemente

(7) Basiswechsel: Seien $\mathcal{A} = (|v_i\rangle)$ und $\mathcal{B} = (|w_i\rangle)$ Orthonormalbasen von V. Für $v = \sum_i \mu_i |w_i\rangle \in V$:

$$\mu_i = \langle w_i|v\rangle = \sum_j \underbrace{\langle w_i|v_j\rangle}_{(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{ij}} \underbrace{\langle v_j|v\rangle}_{\lambda_j}$$

vgl. § 4.4a

(8) Transformationsformel für $F \in \mathrm{End}(V)$:

$$\underbrace{\langle w_i | F | w_j \rangle}_{\tilde{A}} \ = \ \sum_{kl} \underbrace{\langle w_i | v_k \rangle}_{S_{ik} = T_{B}^{\mathcal{A}}} \underbrace{\langle v_k | F | v_l \rangle}_{A} \underbrace{\langle v_l | w_j \rangle}_{S^{-1}}$$

vgl. §4.46(3)

(9) diagonalisierter Endomorphismus:

$$\langle v_i | F | v_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad F = \sum_i \lambda_i \, |v_i\rangle\langle v_i|$$

(die λ_i sind hier nicht unbedingt alle verschieden)

(vgl. Kap. 7.3)

e) Bidualraum (nur Skript)

Für $v \in V$ fest ist $\psi_v^*: V^* \to K$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$, linear, d.h. $\psi_v^* \in \mathrm{Hom}(V^*, K)$.

<u>Bew.:</u> $\psi_v^*(\varphi + \lambda\varphi') = (\varphi + \lambda\varphi')(v) = \varphi(v) + \lambda\varphi'(v)$
$= \psi_v^*(\varphi) + \lambda\psi_v^*(\varphi')$ □

<u>Def.:</u> Wir nennen $V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ den **Bidualraum** zu V. Ist $V \cong V^{**}$, so heißt V **reflexiv**.

<u>Beispiel:</u>

$V = \mathbb{R}^n$: Sei $y \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann ist

$\psi_y^*: (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$, $\psi_x \mapsto \psi_y^*(\psi_x) = \psi_x(y) = x^T y$.

<u>Satz:</u> Die kanonische Abbildung $\iota: V \to V^{**}$, $v \mapsto \psi_v^*$ ist linear und injektiv. Für $\dim V < \infty$ ist $V \cong V^{**}$.

<u>Bew.:</u> $\psi_{v+\lambda v'}^*(\varphi) = \varphi(v + \lambda v') = \varphi(v) + \lambda\varphi(v') = \psi_v^*(\varphi) + \lambda\psi_{v'}^*(\varphi)$ für alle $\varphi \in V^*$. Injektiv: $\psi_u^* = \psi_v^*$, d.h.
$\varphi(u) = \psi_u^*(\varphi) = \psi_v^*(\varphi) = \varphi(v)$, also $\varphi(u) - \varphi(v) = 0$
bzw. $\varphi(u - v) = 0 \Rightarrow u = v$. □

<u>Bem.:</u> Jeder Hilbertraum ist reflexiv. (Fréchet-Riesz)