

**MATHEMATICS
OF
PLANET EARTH**



SIMONS FOUNDATION

Freie Universität



Berlin

KliMathematik

Modelle, Daten und Strukturen

Rupert Klein
Freie Universität Berlin

Simons Lecture, Berlin 2013



Themen

Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

Modellreduktion und rigorose Analyse

Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten

Themen

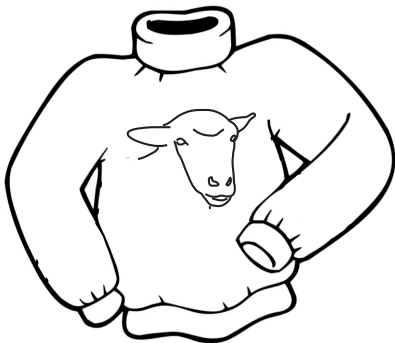
Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

Modellreduktion und rigorose Analyse

Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten

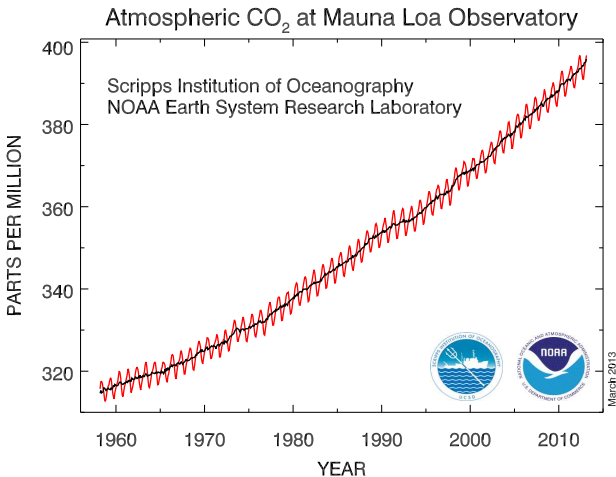


100% Wolle



1.5% Fett

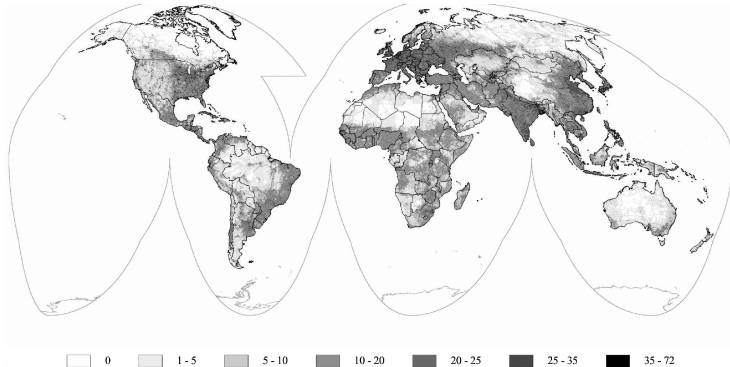
Prozent CO₂ in der Luft



Zunahme des CO₂-Gehaltes der Luft von 1960 bis heute: **26%**

siehe <http://www.esrl.noaa.gov/gmd/obop/mlo/>

Prozent der festen Erdoberfläche



Ausmaß menschlichen Einflusses auf die Landoberfläche

weiss: kein Einfluß

vom Menschen beeinflusste Landoberfläche: ca. **83%**

aus: Sanderson et al. (2002), BioScience, vol. 52, No. 10, pp. 891-904



Persönlicher Kommentar:

Wir werden den Planeten auf jeden Fall massiv verändern.

Also sollten wir **gut überlegen**, wohin die Reise gehen soll.

Themen

Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

Modellreduktion und rigorose Analyse

Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten

Klima:

Zusammenfassung der Wettererscheinungen, die den **mittleren Zustand der Atmosphäre** in einem mehr oder weniger großen Gebiet charakterisieren.

Repräsentiert durch **statistische Gesamteigenschaften** (Mittelwerte, Extremwerte, Häufigkeiten, Andauerwerte u.a.) über einen genügend langen Zeitraum (ca. **30 Jahre**).

Quelle: <http://www.dwd.de/> (*gekürzter Text*)

Klimamodellierung – warum?

gigantische Komplexität
keine Laborexperimente



Modellbildung und Simulation

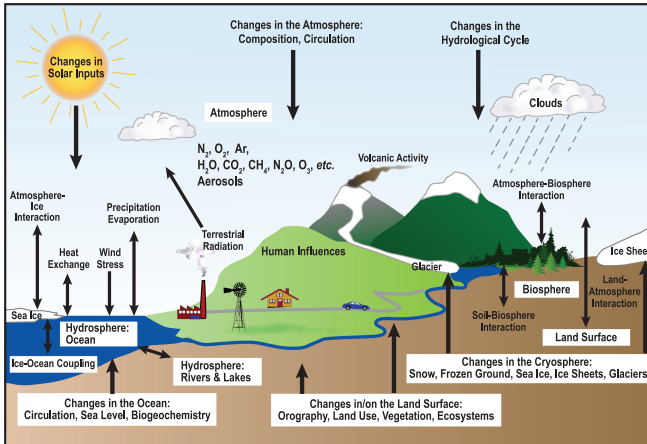


Vorgehensweise:
Extrahiere „Statistik“ aus
Modellsimulationen



Aber:

**Wie bekommen wir die riesigen
Datenmengen in den Griff?**



Intergovernmental Panel for Climate Change, Assessment Report 4, 2007

Themen

Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

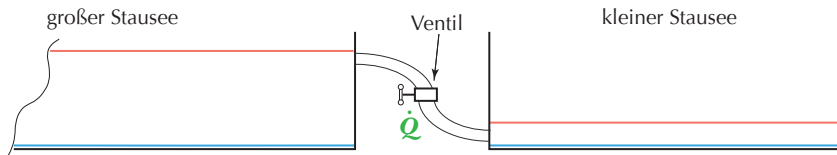
Modellreduktion und rigorose Analyse

Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten

„Prozente“ und Modellbildung

Beispiel:

Schnelles bzw. **langsames** Auffüllen eines „Stausees“

Schnelles Auffüllen:



komplexe Wellenvorgänge

Wellenzeit = 50% Ventilöffnungszeit

Langsames Auffüllen:



gleichmäßiges Ansteigen des Wasserspiegels

$$\text{Wellenzeit} = 1\% \text{ Ventilöffnungszeit}$$

Stausee: mit oder ohne Wellen?

Schnelles Auffüllen:

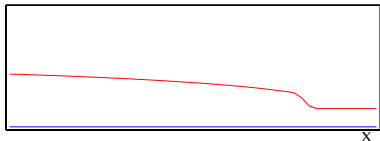
Wasserstand $h(t, x)$, Geschwindigkeit $u(t, x)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial (hu^2 + gh^2/2)}{\partial x} = 0$$

$$hu(0, x) = h_0, \quad hu(t, 0) = \dot{Q}(t)$$

Wellenzeit = 50% Ventilöffnungszeit



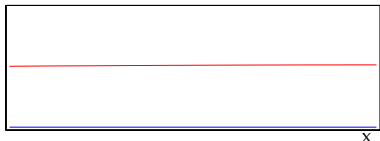
Langsames Auffüllen:

Wasserstand $H(t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\dot{Q}(t)}{A}$$

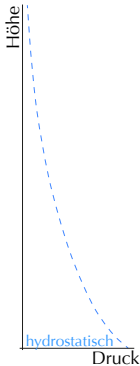
$$H(0) = H_0$$

Wellenzeit = 1% Ventilöffnungszeit

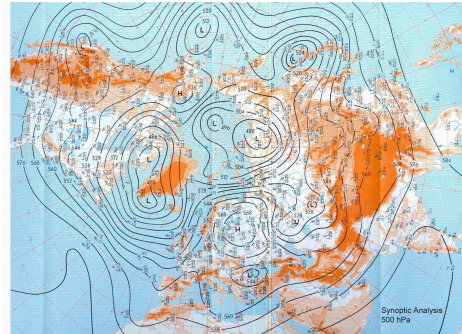


Schallwellen

vertikal: fast hydrostatischer Druck



horizontal: Hoch- und Tiefdruckmuster

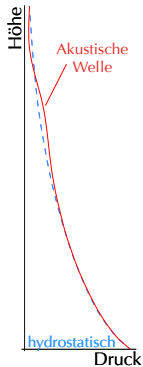


Dank an P. Névir, Meteorologie, FU-Berlin

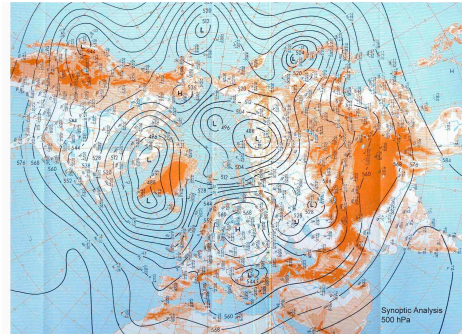
$$\frac{\text{Vertikale Schallzeit}}{\text{Wetterkartenzeit}} \sim \frac{33 \text{ sec}}{1 \text{ Tag}} \sim 0.04\%$$

Schallwellen

vertikal: fast hydrostatischer Druck



horizontal: Hoch- und Tiefdruckmuster



Dank an P. Névir, Meteorologie, FU-Berlin

$$\frac{\text{Vertikale Schallzeit}}{\text{Wetterkartenzeit}} \sim \frac{33 \text{ sec}}{1 \text{ Tag}} \sim 0.04\%$$

Alle Schallwellen erlaubt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathcal{L}_u[\mathbf{u}] \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -g + \mathcal{L}_w[\mathbf{w}] \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \mathcal{L}_T[\mathbf{T}] \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}$$

verantwortlich für vertikale Schallwellen

Kein vertikal propagierender Schall

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathcal{L}_u[\mathbf{u}] \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -g \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \mathcal{L}_T[\mathbf{T}] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Annals of Mathematics, **166** (2007), 245–267

Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics

By CHONGSHENG CAO and [EDRISS S. TITI](#)

Abstract

In this paper we prove the global existence and uniqueness (regularity) of strong solutions to the three-dimensional viscous primitive equations, which model large scale ocean and atmosphere dynamics.

Mathematisches Resultat

In der Menge der „glatten“ Funktionen sind die Lösungen der Basisgleichungen der meisten globalen Klimamodelle

- ▶ eindeutig und
- ▶ gutartig von den Problemparametern abhängig

Annals of Mathematics, **166** (2007), 245–267

Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics

By CHONGSHENG CAO and [EDRISS S. TITI](#)

Abstract

In this paper we prove the global existence and uniqueness (regularity) of strong solutions to the three-dimensional viscous primitive equations, which model large scale ocean and atmosphere dynamics.

Bis hierher:

Modellreduktion hilft, den Rechenaufwand einzudämmen

ebenso wichtig:

Modellreduktion unterstützt das **Verständnis** komplexer Prozesse ...

Prozente und Wirbelstürme



Hurricane Rita (September 2005)

<http://eoimages.gsfc.nasa.gov/>

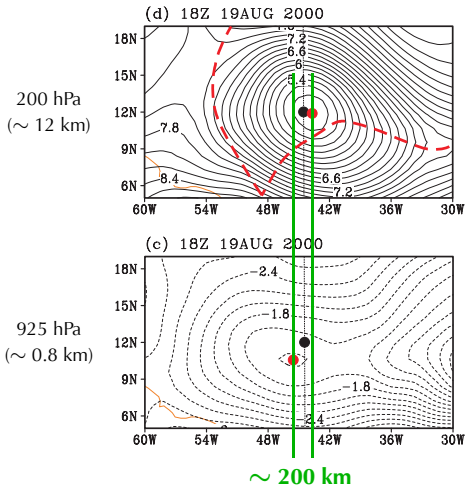
Die wichtigsten „kleinen Prozentzahlen“:

$$\frac{\text{Windgeschwindigkeit i.d. Umgebung}}{\text{max. Windgeschwindigkeit}} \sim 10\%$$

$$\frac{\text{Radius des maximalen Windes}}{\text{Durchmesser „normales Tief“}} \sim 5\%$$

$$\frac{\text{Vertikale Wirbelausdehnung}}{\text{Durchmesser des Wirbelkerns}} \sim 10\%$$

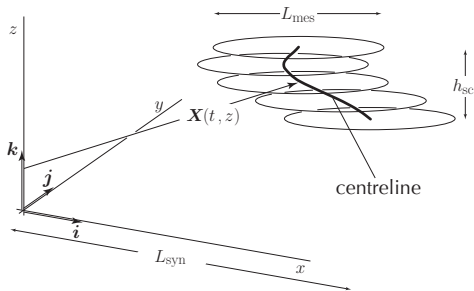
Prozente und Wirbelstürme



Vertikaler Versatz des Wirbelzentrums

Dunkerton et al., *Atmos. Chem. & Phys.*, **9** (2009)

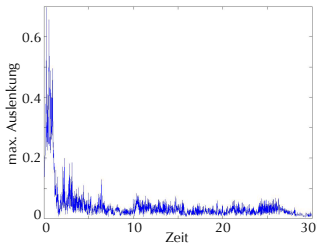
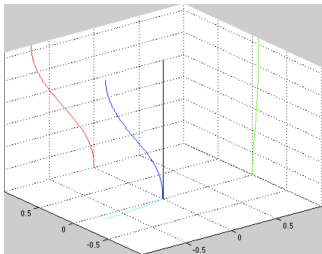
Prozente und Wirbelstürme



Modellstruktur:

- ▶ konzentrierter
- ▶ schnell rotierender
- ▶ fast achsensymmetrischer Wirbel
- ▶ zentriert auf mäandernder Referenzline

Prozente und Wirbelstürme



T. Weber, Diplomarbeit, FU-Berlin, (2011)

Wirbelintensivierung aus Zusammenspiel von

- ▶ Wirbelneigung mit
- ▶ Asymmetrien von
 - ▶ Wärmebilanz
 - ▶ vertikalem Massentransport
 - ▶ Kräftebilanz in Umfangsrichtung

J. Fluid Mech., page 1 of 34. © Cambridge University Press 2012
doi:10.1017/jfm.2012.144

1

Motion and structure of atmospheric mesoscale baroclinic vortices: dry air and weak environmental shear

Eileen Päsche¹, Patrik Marschallik², Antony Z. Owinoh[‡] and Rupert Klein^{2†}

¹ Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, 14195 Berlin, Germany

² Fachbereich Mathematik & Informatik, Freie Universität Berlin, 10632 Berlin, Germany

Themen

Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

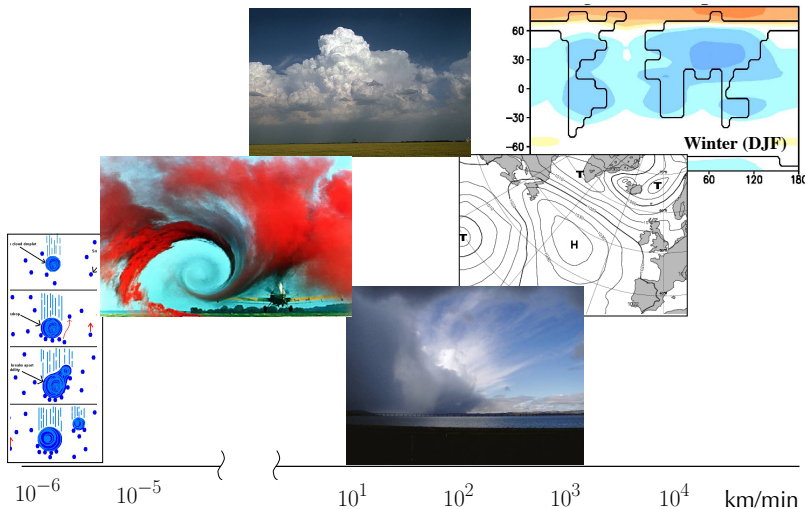
Modellreduktion und rigorose Analyse

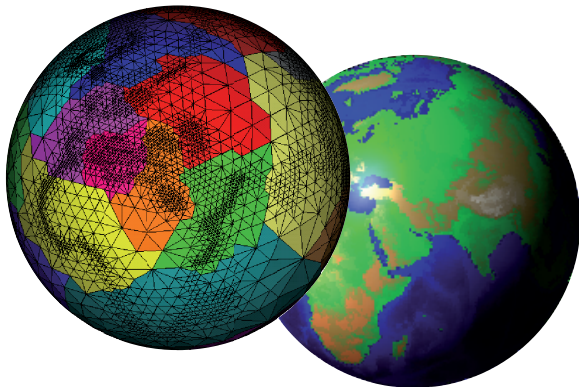
Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten



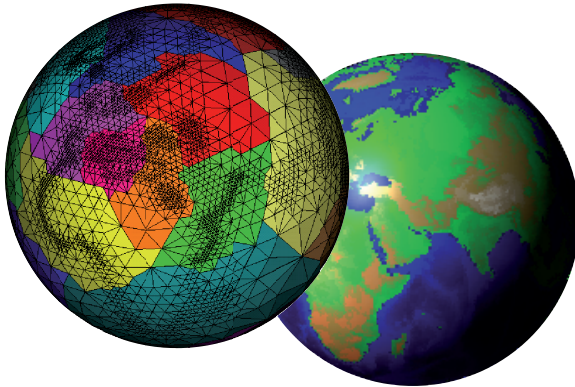
Prozesse mit verschiedenen „Skalen“





Zur **näherungsweise** Lösung der Modellgleichungen auf dem Computer müssen wir
„**Diskretisieren**“

Dank an N. Botta, Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung

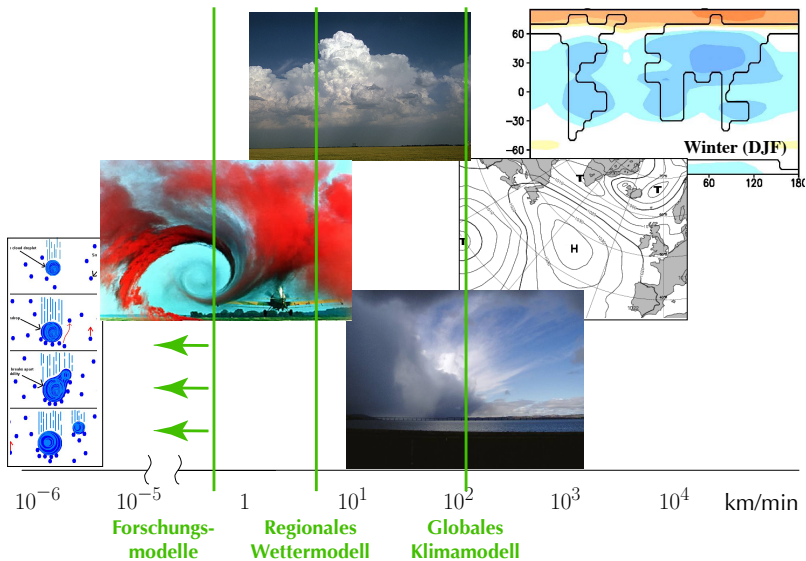


Zur **näherungsweise** Lösung der Modellgleichungen auf dem Computer müssen wir
„**Diskretisieren**“

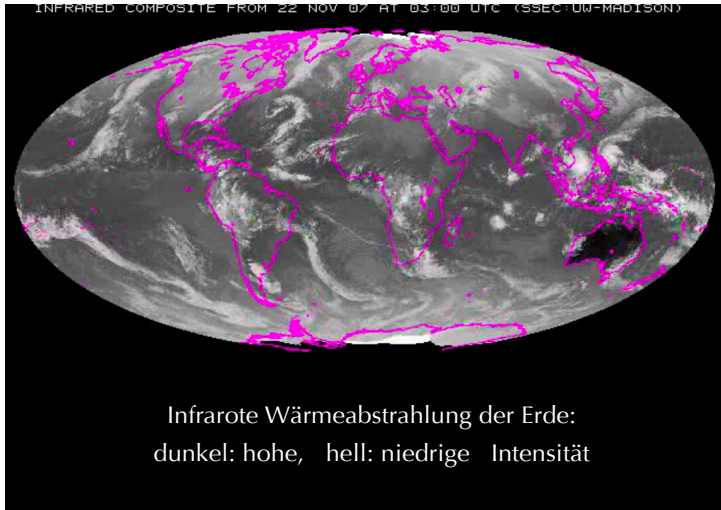
Die „**Auflösung**“ ist dabei ein Maß für die Gittermaschenweite

Dank an N. Botta, Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung

„Auflösung“ in verschiedenen Modellen

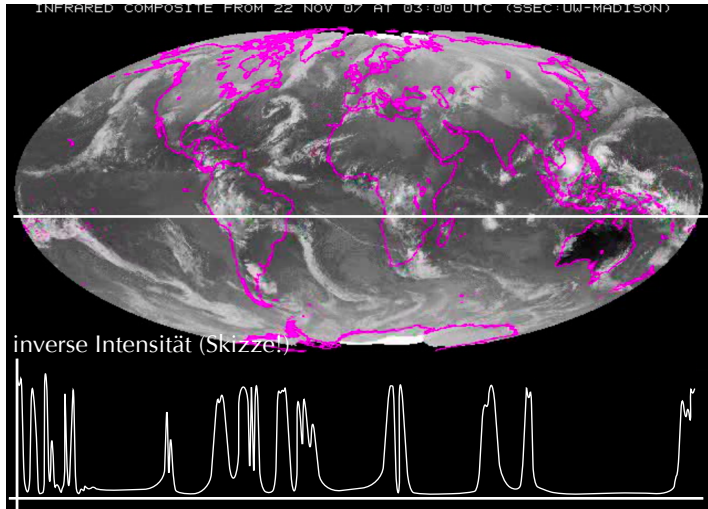


Kleinskalige Wolkenverteilung



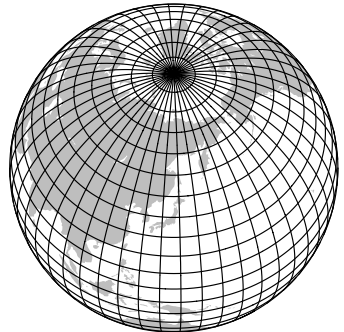
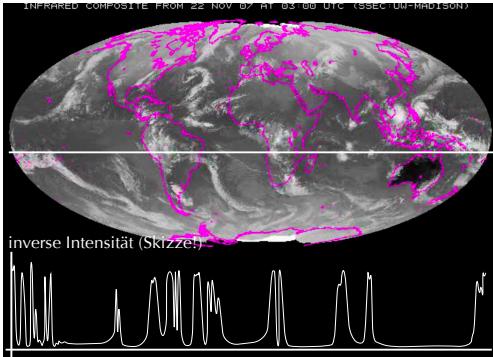
<http://www.ssec.wisc.edu/data/composites.html>

Kleinskalige Wolkenverteilung



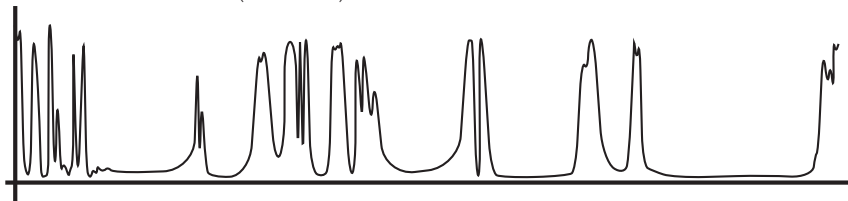
<http://www.ssec.wisc.edu/data/composites.html>

Darstellung auf einem Rechengitter



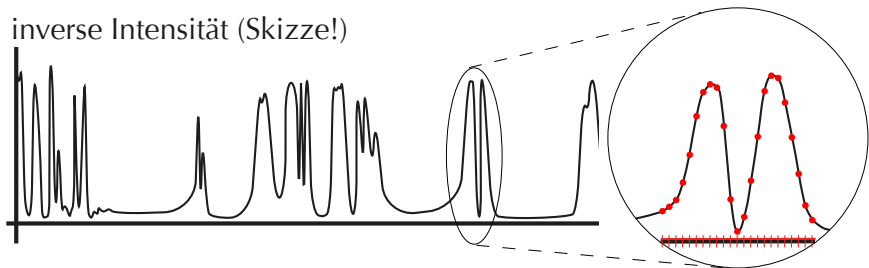
Stark fluktuierende Daten (Skizze) ...

inverse Intensität (Skizze!)



Stark fluktuierende Daten (Skizze) ...

inverse Intensität (Skizze!)



Idealfall:

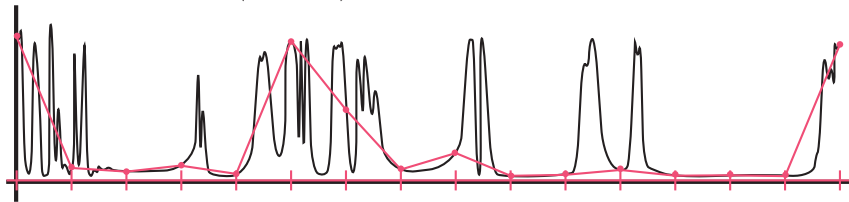
Alle Oszillationen im Prinzip auf Rechengitter darstellbar

Genauigkeit wird reine Frage des Rechenaufwands

Leider sieht die Realität anders aus ...

... abgetastet auf einem Rechengitter

inverse Intensität (Skizze!)



„Kleinskalige“ Prozesse auf dem Rechengitter nicht darstellbar

„Parameterisierungen“ beschreiben deren Netto-Einfluss

Diese sind **physikalisch** aber i.Allg. **nicht mathematisch** gerechtfertigt

Bewusster Umgang mit **Unsicherheiten** wird notwendig

Themen

Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

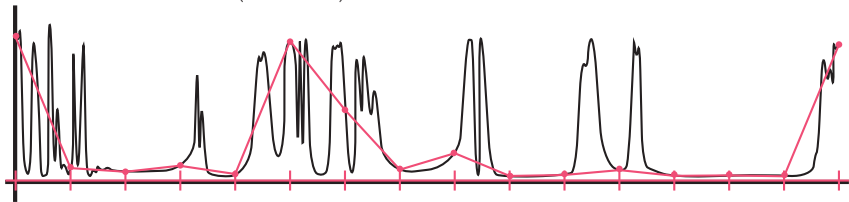
Modellreduktion und rigorose Analyse

Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten

Charakterisierung von Daten

inverse Intensität (Skizze!)

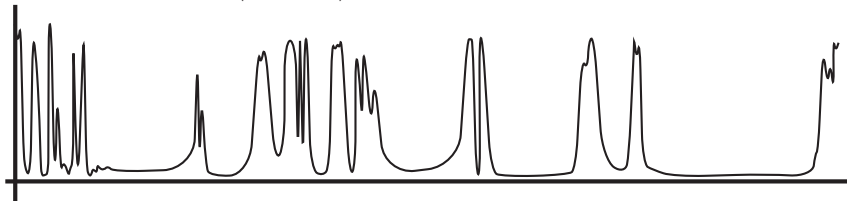


Bewusster Umgang mit Unsicherheiten

- ▶ Wechselwirkung Parameterisierungen \Leftrightarrow Numerische Verfahren
- ▶ „neutrale“ Charakterisierung der (nicht aufgelösten) Strukturen

Charakterisierung von Daten

inverse Intensität (Skizze!)



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ externer Einflussgrößen

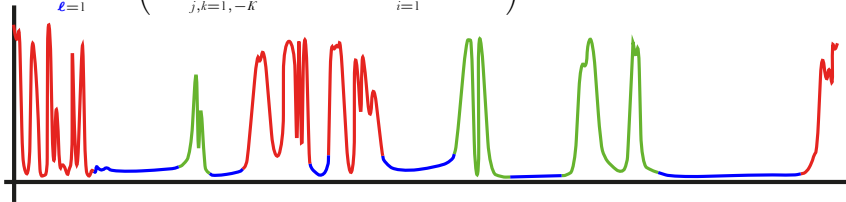
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell jk} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right) + \epsilon(t, x).$$



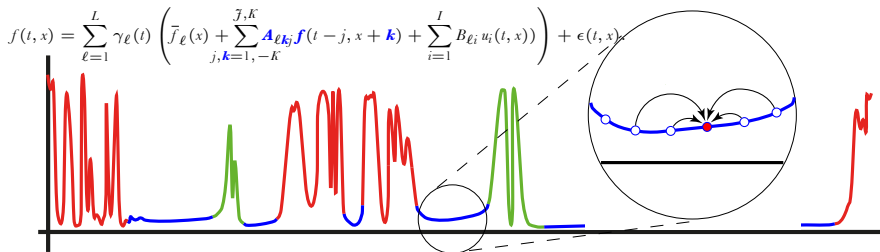
Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „**ähnlicher**“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ externer Einflussgrößen

bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Charakterisierung von Daten



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ **lokaler Abhängigkeiten**
- ▶ externer Einflussgrößen

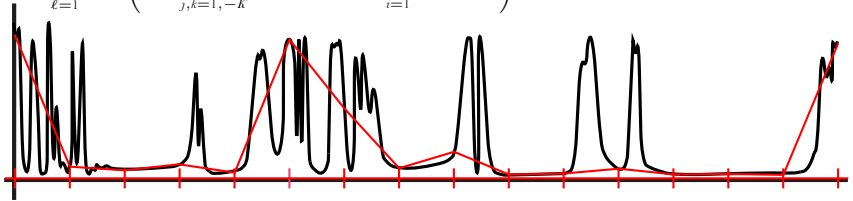
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell kj} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right) + \epsilon(t, x).$$



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ **externer Einflussgrößen**

Grobgitter-Daten

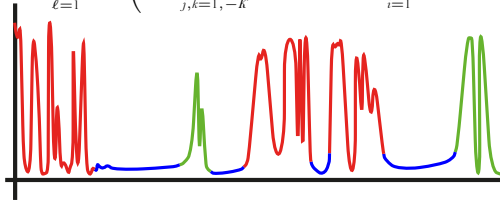
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell kj} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right)$$



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ **externer Einflussgrößen ...**

Jahreszeiten

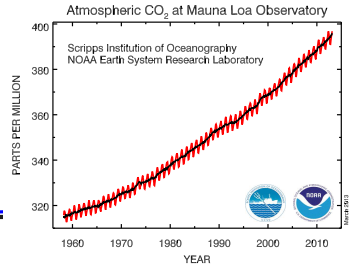
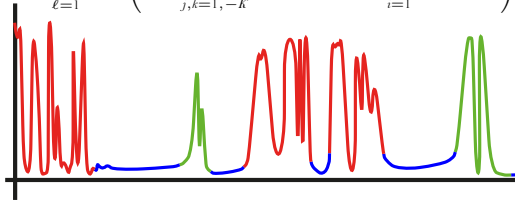
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell jk} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right)$$



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ **externer Einflussgrößen**

CO₂-Anstieg

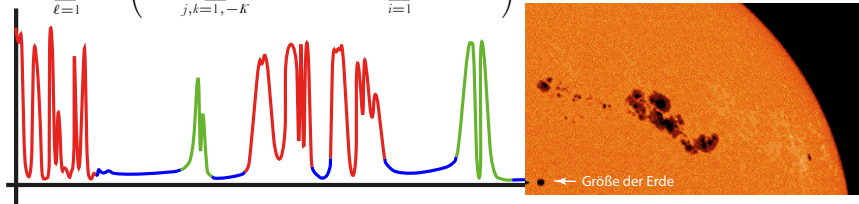
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell kj} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right) + \epsilon(t, x).$$



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ **externer Einflussgrößen**

Sonnenfleckenzyklen

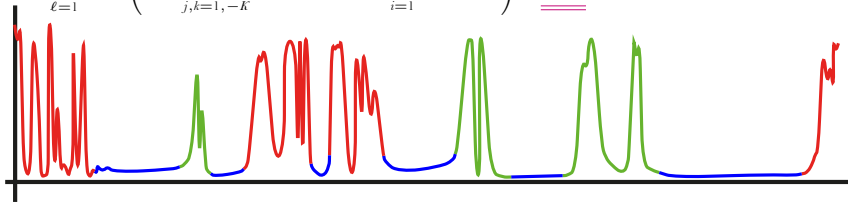
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell kj} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right) + \underline{\underline{\epsilon(t, x)}}.$$



Konstruktion effizienter Ersatzmodelle durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ externer Einflussgrößen

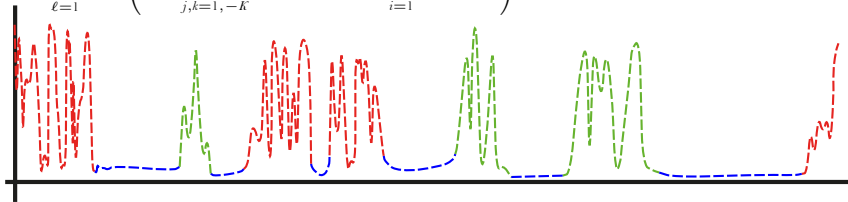
bei **Maximierung des Informationsgewinns** (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen **Restfehlern** und **Anzahl freier Parameter**

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

Charakterisierung von Daten

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell kj} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right) + \epsilon(t, x).$$



Konstruktion effizienter **Ersatzmodelle** durch Identifikation

- ▶ „ähnlicher“ Teildatensätze
- ▶ lokaler Abhängigkeiten
- ▶ externer Einflussgrößen

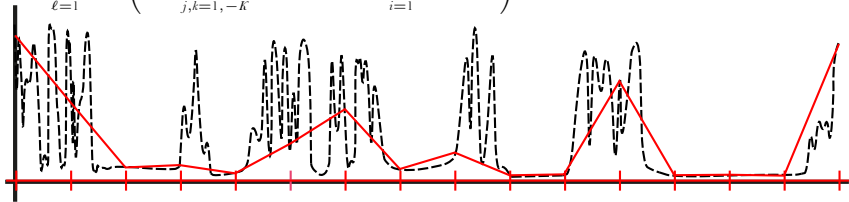
bei Maximierung des Informationsgewinns (Occam's Razor) durch

- ▶ besten Kompromiss zwischen Restfehlern und Anzahl freier Parameter

Metzner, Putzig & Horenko, CAMCoS, 7, 179–229, (2012)

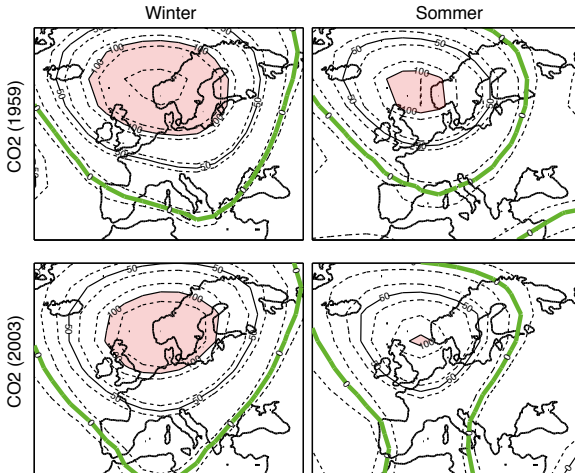
Anwendung 1: „Parameterisierung“

$$f(t, x) = \sum_{\ell=1}^L \gamma_{\ell}(t) \left(\bar{f}_{\ell}(x) + \sum_{j,k=1,-K}^{\bar{J},K} A_{\ell kj} f(t-j, x+k) + \sum_{i=1}^I B_{\ell i} u_i(t, x) \right) + \epsilon(t, x).$$



Auf dem grobem Gitter fehlende Information wird aus dem Ersatzmodell ermittelt

Anwendung 2: „Skandinavien-Hoch“



Einfluß von:

- ▶ Jahreszeit
- ▶ CO₂-Gehalt
- ▶ ~~Sonnensflecken~~

auf „Skandinavien-Hoch“

... eines von vier persistenten Strömungsmustern über Europa im ERA40 Beobachtungsdatensatz (1958–2003)

I. Horenko, *J. Atmosph. Sci.*, **67**, 1559–1574 (2010)

Themen

Prozente

Bedeutung von Klima-Modellen

Modellreduktion und rigorose Analyse

Multiple Skalen und Computersimulationen

Umgang mit Unsicherheiten

für die Realisierung dieser „Simons Lecture“:

Simons Foundation

Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), Berkeley

Freie Universität Berlin

Sandra Patzelt-Schütte, Thomas Vogt, Günter Ziegler, Ehrhard Behrends

für langjährige Unterstützung meiner Forschungsarbeiten:

Deutsche Forschungsgemeinschaft

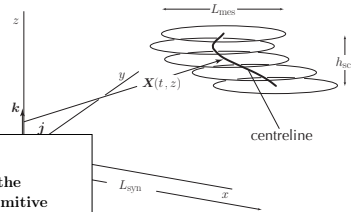
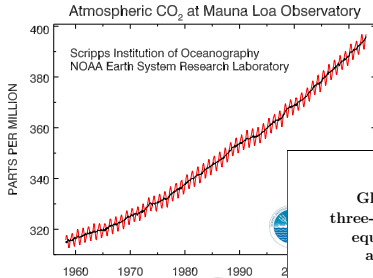
Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung (PIK)

Freie Universität Berlin

... FB Mathematik & Informatik



Schönen Dank für's Zuhören!



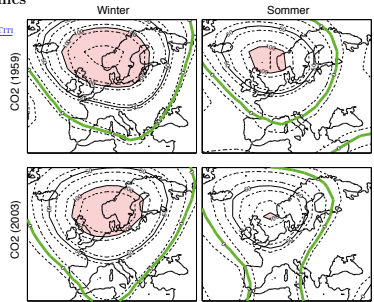
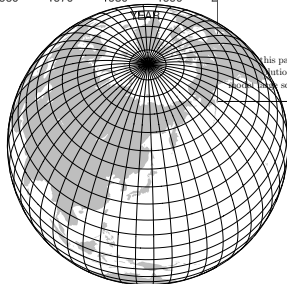
Annals of Mathematics, 166 (2007), 245-267

Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics

By CHONGSHENG CAO and [EDRIS S. TITI](#)

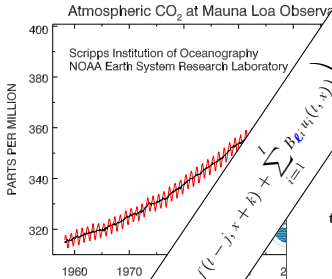
Abstract

In this paper we prove the global existence and uniqueness of solutions to the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics.





Schönen Dank für's Zuhören!



$$f(t, x) = \sum_{k=1}^l \gamma_k(t) \left(\bar{f}_k(x) + \sum_{j,k=1, j \neq k}^{J,K} A_{j,k} f_j(t - j, x + k) + \sum_{i=1}^l B_{i,k} u_i(t, x) \right) + \epsilon(t, x).$$

Annals of Mathematics, 166 (2007), 245-267

Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics

By CHONGSHENG CAO and [EDRIS S. TITI](#)

Abstract

In this paper we prove the global existence and uniqueness of solutions to the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics.

