2 Vektorräume

2.1 Begriff

a) Beispiele

Im folgenden sei K stets ein Körper.

(1) Der Standardraum

$$K^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- Anschauung: $\mathbb{R}^2$ (Ebene), $\mathbb{R}^3$ („unser" 3D-Raum)
- Addition und Multiplikation in K induzieren neue Verknüpfungen auf K^n:

$$+ : K^n \times K^n \to K^n, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Die Addition in K^n erfolgt komponentenweise.

kein n

$$\cdot : K \times K^n \to K^n, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Skalarmultiplikation (keine Verknüpfung lt. §1.2)

(2) Für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ haben wir die reelle Multiplikation:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (\lambda, a + ib) \mapsto \lambda a + i\lambda b$$

(sieht wie Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ aus.)

(3) im Polynomring $K[t]$ können wir neben $P+Q$ und $P\cdot Q$ auch eine Multiplikation mit $\lambda \in K$ erklären: $\cdot : K \times K[t] \to K[t]$, $(\lambda, P) \mapsto \lambda \cdot P$
$$\lambda \cdot (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = \lambda a_0 + (\lambda a_1) t + \ldots + (\lambda a_n) t^n$$

(4) Sei M eine Menge und $V = K^M := \{ f : M \to K \}$ die Menge aller Abbildungen. Für $f, g \in V$ und $\lambda \in K$ erklären wir $f + g \in V$ und $\lambda \cdot f \in V$ „punktweise", d.h.
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in M.$$

NB: für $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ entspricht K^M dem K^n aus (1).

b) Definition

<u>Def.:</u> Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer Addition $+ : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$, und einer Skalarmultiplikation $\cdot : K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, heißt K-Vektorraum (oder Vektorraum über K), wenn gilt:

(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe,

(V2) die Skalarmultiplikation ist verträglich ($\lambda, \mu \in K;\ v, w \in V$):
$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \qquad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w,$$
$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v, \qquad 1 \cdot v = v.$$

Bem.:

(1) Schreibweise: in der Gruppe $(V,+)$ nennen wir das neutrale Element Nullvektor $\vec{0}$ oder 0, und bezeichnen das Negative (Inverse) mit $-v$.

(2) die Beispiele aus a) erfüllen alle die Vektorraumaxiome. Insbesondere gilt für den K^n:

$$\vec{0} = (0,\dots,0) \quad \text{und} \quad -(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,\dots,-x_n).$$

Im Bsp. (2) wird $\mathbb{C}$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(3) Rechenregeln $(\lambda \in K,\ v \in V)$: VL #7

(i) $0 \cdot v = \vec{0}$ $\qquad (\cancel{0 \cdot v} = (0+0)\cdot v = \cancel{0 \cdot v} + 0 \cdot v)$

(ii) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ $\qquad (\cancel{\lambda \cdot \vec{0}} = \lambda \cdot (\vec{0}+\vec{0}) = \cancel{\lambda \cdot \vec{0}} + \lambda \cdot \vec{0})$

(iii) $\lambda \cdot v = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$

Ist $\lambda \cdot v = \vec{0}$, aber $\lambda \neq 0$, dann:

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)\cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

(iv) $(-1)\cdot v = -v$

$$v + (-1)\cdot v = 1 \cdot v + (-1)\cdot v = (1-1)\cdot v = 0 \cdot v = \vec{0}$$

(v) Umkehrbarkeit der Skalarmultiplikation:

$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = v$ für $\lambda \neq 0$ $\qquad$ L.S. $= (\lambda^{-1}\lambda)\cdot v = 1 \cdot v =$ R.S.

(4) Wegen der Verträglichkeit der Verknüpfungen, müssen wir ab jetzt nicht mehr zwischen $+$ und $\boldsymbol{+}$ bzw. $\cdot$ und $\bullet$ unterscheiden, ebenso besteht keine Verwechslungsgefahr zwischen $0 \in K$ und $\vec{0} \in V$.

c) Untervektorräume

Def.: Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt Untervektorraum von V, falls

(i) $W \neq \emptyset$,

(ii) $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$,

(iii) $v \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$.

W ist abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation.

Bsp.:

(1) betrachte Teilmengen in $V = \mathbb{R}^2$ und sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

	gültig	
$W_1 = \{0\}$		Ursprung
$W_2 = \{ax + by = c\}$	✓	Gerade (für $c=0$ durch Ursprung)
$W_3 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$	✓	Kreisscheibe
$W_4 = \{x, y \geq 0\}$	(ii)	1. Quadrant
$W_5 = \{x \cdot y \geq 0\}$	(iii)	1. und 3. Quadrant

Nur W_1 und W_2 für $c=0$ erfüllen (i)–(iii), d.h. sie sind Untervektorräume.

(2) Untervektorräume in $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$: (Bsp. 4 in §2.1a)

$$\mathbb{R}[t]_d \subset \mathbb{R}[t] \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Polynome vom Grad $\leq d$ — stetig differenzierbar — stetige Funktionen

Satz:

Ein Untervektorraum $W \subset V$ zusammen mit der auf W induzierten Addition $+|_W$ und der Skalarmultiplikation $\cdot|_W$ ist wieder ein Vektorraum.

Bew.: Kommutativität, Assoziativität und die Eigenschaften (V2) erbt die Addition in W von der in V.
Wegen Eigenschaft (i) des Untervektorraums gibt es ein $v \in W$, und wegen (iii) ist $0 \cdot v = \vec{0} \in W$. Außerdem ist wegen (iii) zu jedem $v \in W$ auch $-v = (-1) \cdot v \in W$.
$\Rightarrow$ $(W, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
Alternativ: wegen (i, ii) ist $(W, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$, und daher auch Gruppe. $\square$

Bem.:

(3) der Durchschnitt von Untervektorräumen $W_i \subset V$ $(i \in I$, Indexmenge$)$ ist wieder ein Untervektorraum:

$$W := \bigcap_{i \in I} W_i \subset V.$$

Bew.: $0 \in W_i \Rightarrow 0 \in W$, also $W \neq \emptyset$. Für $v, w \in W$ gilt $v, w \in W_i$ und damit $v + w \in W_i$ für alle $i \in I$.
$\Rightarrow v + w \in W$. Analog: $\lambda v \in W$ für alle $\lambda \in K, v \in W$. $\square$