# 2.3 Verknüpfungen von Vektorräumen

VL#10

Sei $(v_1, v_2, \dots)$ eine Basis von V. Dann gibt es Untervektorräume $W_r$, so daß $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset V$, z.B. $W_r = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$.

$\Rightarrow$ Welche innere Struktur hat ein Vektorraum? Gibt es eine Zerlegung in Unterräume?

## a) Vektorraumsumme

Def.: Sei V ein K-Vektorraum mit Unterräumen $U_1, U_2 \subset V$. Dann heißt

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

die Summe von $U_1$ und $U_2$.

Bem.:

(1) $U_1 + U_2$ ist ein Unter(vektor)raum von V

Bew.: i) $0 \in U_1 + U_2$. ii) Sei $u, u' \in U_1 + U_2$. Dann gibt es $u_1, u_1' \in U_1$ und $u_2, u_2' \in U_2$: $u = u_1 + u_2$, $u' = u_1' + u_2'$. Wegen $u_1 + u_1' \in U_1$, $u_2 + u_2' \in U_2$ gilt $u + u' \in U$.

iii) analog: $\lambda \in K$, $u = u_1 + u_2 \in U \Rightarrow \lambda u = \lambda u_1 + \lambda u_2 \in U$. $\square$

(2) $\dim(U_1+U_2) \leq \dim U_1 + \dim U_2$

Bew.: $U_1+U_2 = \operatorname{span}(U_1 \cup U_2)$, vgl. Definitionen.

$\dim \operatorname{span}(U_1 \cup U_2) \leq \dim \underbrace{\operatorname{span}(U_1)}_{U_1} + \dim \underbrace{\operatorname{span}(U_2)}_{U_2}$. □

(3) Dimensionsformel für Summen:

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2),$$

falls $U_1 \cap U_2$ endlich-dimensional ist.

Konvention: $\infty + \infty = \infty$, $n + \infty = \infty + n = \infty$.

Bew.: Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$, und sei $(w_j)_{j \in J}$ ein Erzeugendensystem von $U_1+U_2$. Ergänze $(v_1, \ldots, v_n)$ durch Auswahl von $S_1 \subset J$ bzw. $S_2 \subset J$ zu einer Basis von $U_1$ bzw. $U_2$. Zu zeigen: $(v_1, \ldots, v_n) \cup (w_j)_{j \in S}$ mit $S := S_1 \cup S_2$ ist eine Basis von $U_1+U_2$. Offenbar ist es Erzeugendensystem. Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j \in S} \mu_j w_j = 0$. Setze $u := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j \in S_1} \mu_j w_j$.

$\Rightarrow$ $u \in U_1$ und $u = -\sum_{j \in S_2} \mu_j w_j \in U_2$, also $u \in U_1 \cap U_2$.

Es gibt also $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in K$ mit $u = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i v_i$. Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten in $U_1$ folgt $\lambda_i = \sigma_i$ und $\mu_j = 0$ für $j \in S_1$. Also $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j \in S_2} \mu_j w_j = 0$, und wegen der linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_n) \cup (w_j)_{j \in S_2}$ auch $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\mu_j = 0$, $j \in S_2$. □

## b) direkte Summe

Wann gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$, also $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ?

<u>Proposition:</u> Für Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ mit $V = U_1 + U_2$ ist äquivalent:

(i) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

(ii) Jedes $v \in V$ ist eindeutig darstellbar als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.

(iii) Zwei Vektoren $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $u_1, u_2 \neq 0$ sind linear unabhängig.

<u>Bew.:</u> i) $\Rightarrow$ ii): Sei $v = u_1 + u_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$. Dann folgt:

$$u_1 - \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Wären $u_1, u_2$ linear abhängig, dann gäbe es zwei verschiedene Darstellungen von $v = 0$. $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 + 0$

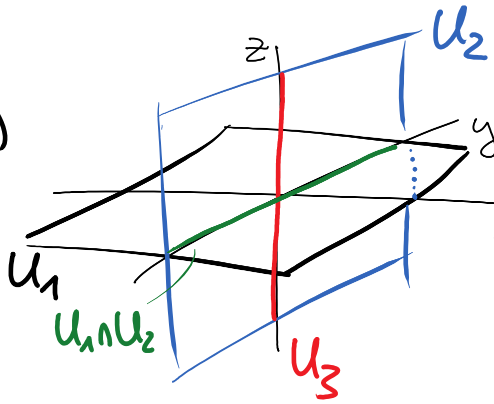
iii) $\Rightarrow$ i) Sei $v \in U_1 \cap U_2$ mit $v \neq 0$. Dann sind $v \in U_1$ und $-v \in U_2$ linear abhängig. $\lightning$ $\square$

<u>Def.:</u> Ein Vektorraum $V$ heißt direkte Summe $V = U_1 \oplus U_2$ zweier Unterräume $U_1, U_2 \subset V$, wenn $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

**Bsp.:** $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x,y,z) \mid z=0\}$ xy-Ebene
$U_2 = \{(x,y,z) \mid x=0\}$ yz-Ebene
$U_3 = \{(x,y,z) \mid x=0, y=0\}$ z-Achse

$V = U_1 + U_2 = U_1 + U_3$

$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$
$3 = 2 + 2 - 1$




aber: $U_1 \cap U_3 = \{0\}$, also
$V = U_1 \oplus U_3$
$\dim V = \dim U_1 + \dim U_3 - \dim(U_1 \cap U_3)$
$3 = 2 + 1 - 0$

Außerdem: $U_3 \subset U_2$, daher: $U_2 = U_2 + U_3$, $U_2 \cap U_3 = U_3$

$\dim(U_2 + U_3) = \dim U_2 + \underbrace{\dim U_3 - \dim(U_2 \cap U_3)}_{0 = 1-1}$
$2 = 2 + 0$

**Bem.:**

(1) Für $V$ mit $\dim V < \infty$ gilt:

$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2$ und $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$

Bew.: $\Rightarrow$: Dimensionsformel mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
$\Leftarrow$: aus $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ folgt $U_1 \cap U_2 = \operatorname{span}(\emptyset) = \{0\}$. $\square$

(2) Ist $U \subset V$ Unterraum, so gibt es dazu einen Unterraum $W \subset V$ mit $V = U \oplus W$.

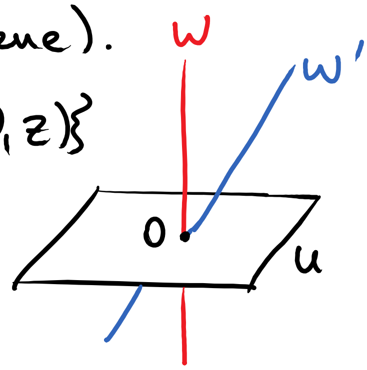
Bew.: ergänze Basis $(v_i)_{i \in I}$ von $U$ zu Basis $(v_i)_{i \in I} \cup (w_j)_{j \in S}$ von $V$, setze $W = \operatorname{span}(w_j)_{j \in S}$. $\square$

(3) der „direkte Summand" $W$ ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt

<u>Bsp.:</u> $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{z = 0\}$ (xy-Ebene).

$W = \{(0,0,z)\}$ und $W' = \{(z,0,z)\}$

$\Rightarrow V = U \oplus W = U \oplus W'$




<u>Def.:</u> Seien $U_1, \ldots, U_r$ Unterräume des Vektorraums $V$. Hat jedes $v \in V$ genau eine Darstellung $v = u_1 + \ldots + u_r$ mit $u_i \in U_i$, $1 \leq i \leq r$, dann heißt $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_r$.

<u>Proposition:</u> Für Unterräume $U_1, \ldots, U_r \subset V$ und $\dim V < \infty$ sind äquivalent:

i) $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$.

ii) $V = U_1 + \ldots + U_r$ und jede Familie $(u_1, \ldots, u_r)$ mit $u_i \in U_i$, $u_i \neq 0$, ist linear unabhängig.

iii) $V = U_1 + \ldots + U_r$ und $\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_r$

## c) Tensorprodukt (nur Skript)

**Def.:** Als direktes Produkt zweier $K$-Vektorräume $V, W$ bezeichnet man das kartesische Produkt $V \times W$, also die Menge

$$V \times W = \{(v,w) \mid v \in V,\ w \in W\}$$

mit komponentenweise definierter Addition und Skalarmultiplikation, d.h. für $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$, $\lambda \in K$ gilt:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$
$$\lambda (v,w) := (\lambda v, \lambda w).$$

**Bem.:**

(1) $V \times W$ wird so zu einem Vektorraum

(2) Es gilt: $V \times W = (V \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times W)$ $\neq V + W$

**Bew.:** $V \times \{0\} = \{(v,0) \mid v \in V\}$, also $V \times W = (V \times \{0\}) + (\{0\} \times W)$ mit $(V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W) = \{(0,0)\}$ $\square$

(3) Sind $(v_i)_{i \in I}$ und $(w_j)_{j \in J}$ Basen von $V$ bzw. $W$, dann ist $((v_i, 0))_{i \in I} \cup ((0, w_j))_{j \in J}$ eine Basis von $V \times W$.

(4) Daraus folgt die Dimensionsformel:

$$\dim (V \times W) = \dim V + \dim W$$

Im Vergleich zur direkten Summe ist also nichts gewonnen.

**Def.:** Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume mit Basen $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$. Als Tensorprodukt(raum) $V\otimes W$ bezeichnen wir den $K$-Vektorraum, der vom kartesischen Produkt der Basen aufgespannt wird:

$$V\otimes W = \operatorname{span}_K \left((v_i, w_j)\right)_{i\in I, j\in J}\ .^{*}$$

Statt $(v_i, w_j)$ schreibt man $v_i\otimes w_j$ für die Basisvektoren.
Dann hat jedes $u\in V\otimes W$ die Darstellung

$$u = \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij}(v_i\otimes w_j),$$ wobei nur endlich viele $a_{ij}\neq 0$.

*Vorsicht: hier ist $\lambda(v_i, w_j) = \lambda(v_i\otimes w_j) \neq (\lambda v_i, \lambda w_j)$

**Bem.:**

(5) das Tensorprodukt zwischen Vektoren $v\in V$, $w\in W$ ist definiert als die „bilineare" Abbildung

↳ linear in jedem Argument

$$\otimes: V\times W \mapsto V\otimes W,$$

$$(v, w) = \left(\sum_{i\in I}\lambda_i v_i, \sum_{j\in J}\mu_j w_j\right) \mapsto \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \lambda_i \mu_j (v_i\otimes w_j)$$

(6) Dimensionsformel: $\dim(V\otimes W) = (\dim V)\cdot(\dim W)$

(7) Beispiel: $U = \mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^3$, $\dim U = 2\cdot 3 = 6$

Für $u\in U$ gibt es eindeutige $a_{ij}\in\mathbb{R}$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(e_i\otimes e_j).$$

Anordnung der Koeffizienten $a_{ij}$ als Matrix:

↙ geht nicht für $V_1\otimes V_2\otimes V_3$, etc.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$ → Basisvektor $e_1\otimes e_3$

Konkret: $$(1, 2)\otimes(3, 5, 7) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 10 & 14\end{pmatrix}$$