3.4 Matrixinversion

Seien $A \in K^{n\times n}$ und $b \in K^n$. Das LGS $Ax=b$ hat genau eine Lösung $x \in K^n$, falls $\operatorname{rang} A = n$.
Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des K^n.
Betrachte n simultane LGS: $\quad e_j = (\underset{1}{0}, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots \underset{n}{0})$

$$A v_k = e_k \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad , \quad \operatorname{rang} A = n.$$

$\Rightarrow$ Die Lösungen $v_1, \dots, v_n$ existieren und sind eindeutig.
Sie bilden die Spalten einer Matrix $B = (v_1, \dots, v_n) \in K^{n\times n}$.
Es gilt: $\quad A \cdot B = \mathbb{1}_n$, d.h. B ist Inverses von A!

<u>Bew.:</u> Spalte $v_k = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots, n$. Dann ist $B = (v_{jk})_{jk}$

$$[A \cdot B]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_{jk} \overset{(LGS)}{=} [e_k]_i = \delta_{ik} = [\mathbb{1}]_{ik}. \qquad \square$$

<u>Algorithmus:</u> (Matrixinversion)
Sei $A \in K^{n\times n}$ gegeben, schreibe die $n\times 2n$-Matrix $(A|\mathbb{1}_n)$.
1) Bringe A durch Zeilenumformungen von $(A|\mathbb{1}_n)$ auf Zeilenstufenform $\Rightarrow (\tilde{A}|\tilde{B})$ (keine Spaltenvertauschungen!)
2) Prüfe, ob $\operatorname{rang} \tilde{A} = n$, sonst ist A nicht invertierbar.
3) Bringe $(\tilde{A}|\tilde{B})$ durch weitere Zeilenumformungen auf die Form $(\mathbb{1}_n | B)$ (von unten nach oben)

$\Rightarrow$ Die Matrix B auf der rechten Hälfte ist A^{-1}

Bem.:

(1) die Zeilenumformungen in Schritt 3) ersetzen das „Einsetzen" bei der Lösung eines LGS. Die Lösung steht dann in der rechten Spalte:

$$Ax=b: \quad (A|b) \rightsquigarrow (\tilde{A}|\tilde{b}) \rightsquigarrow (\mathbb{1}_n|x)$$

(2) um die Diagonalform $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{1}_n$ zu überführen, erlauben wir zusätzlich die Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. (Lös(A,b) bleibt invariant.)

(3) Beispiel:

$$(A|\mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- A auf Zeilenstufenform
- rang $\tilde{A} = 3$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(III)}-\text{(I)}+\text{(II)}$$

- $\tilde{A}$ auf Diagonalform

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)}-\text{(III)}-2\cdot\text{(II)} \\ \text{(II)}-4\cdot\text{(III)} \end{array}$$

- Normieren der Diagonalen

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad :(-1) \qquad = (\mathbb{1}_3|A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es bleibt zu zeigen:

$$A \in K^{n \times n} \text{ invertierbar} \iff \text{rang } A = n$$