

# 5 Determinanten

VL#13

## 5.1 Definition und Eigenschaften

### a) Definition

Quadratische Matrizen haben neben dem Rang eine weitere Kennzahl, die invariant ist unter Basiswechsel:

die Determinante. Anwendungen:

- Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme
- Volumenbestimmung eines Spats bzw. Parallelepipeds
- Orientierung eines Koordinatensystems

Def.: Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Abbildung  $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $A \mapsto \det A$ , heißt **Determinante**, falls gilt:

(D1)  $\det$  ist **multilinear**, d.h. linear in jeder Zeile von  $A$ .

(D2)  $\det$  ist **alternierend**, d.h. hat  $A$  zwei gleiche Zeilen, so ist  $\det A = 0$ .

(D3)  $\det$  ist **normiert**, d.h.  $\det \mathbb{1}_n = 1$ .

Kurznotation:  $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bem.:

(1) „linear in jeder Zeile“ heißt für jedes  $1 \leq i \leq n$ :

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{\scriptsize } \{i-1 \text{ Zeilen} \\ \text{\scriptsize } \} \\ \text{\scriptsize } \{n-i \text{ Zeilen} \end{matrix}$$

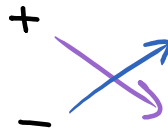
für Zeilen  $a_i, a_i' \in K^n$  und  $\lambda \in K$ .

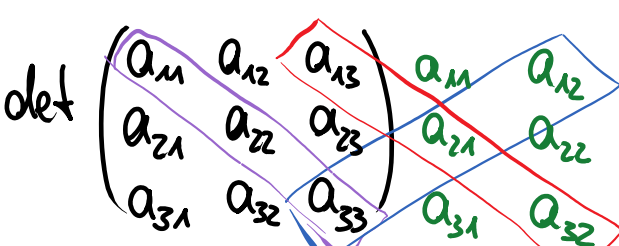
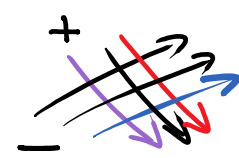
(2) Existenz und Eindeutigkeit von  $\det$  müssen gezeigt werden. (mühsam)

(3) Formeln für die Berechnung von  $\det A$  sind relativ unübersichtlich und für große  $n$  aufwendig, ein effizientes Verfahren basiert auf dem Gauß-Algorithmus.

(4) Beispiele:

$n=1$ :  $\det(a) = a$

$n=2$ :  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$  

$n=3$ :  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$   

$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{21} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$  (Regel von Sarrus)

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Streichen von Zeile 1, Spalte 1

(Entwicklungssatz von Laplace)

## b) Eigenschaften

Aus der abstrakten Definition erhalten wir nützliche Rechenregeln für und Eigenschaften von Determinanten:

Satz: Seien  $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$  eine Determinante sowie  $A \in K^{n \times n}$  und  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

(i)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .

(ii) Ist eine Zeile von  $A$  gleich Null, so ist  $\det A = 0$ .

(iii)

$$\det \begin{pmatrix} \overbrace{\vdots}^A \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{Zeilenvertauschung})$$

↑  
Vorzeichenwechsel

(iv)

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad i \neq k.$$

(Addition des  $\lambda$ -fachen der Zeile  $k$  zur Zeile  $i$ .)

(v) Für eine obere Dreiecksmatrix gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n. \quad (\text{Produkt der Diagonalelemente})$$

(vi)  $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$ .

Bew.: (i) folgt direkt aus (D1). Ebenso (ii), da für jede lineare Abbildung  $f(0)=0$  gilt.

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D2)}}{=} \\
 & = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_0 + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}}_0 \\
 & \stackrel{\text{(D1)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_k \\ \vdots \\ a_k + a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D2)}}{=} 0
 \end{aligned}$$

$$\text{(iv)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D1)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}}_0$$

(v) Sind alle  $\lambda_i \neq 0$ , dann führen wir Zeilenumformungen wie in (iv) durch, um die Matrix diagonal zu machen:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_n & \end{pmatrix} \stackrel{\text{(iv)}}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_n & \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D1)}}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n \underbrace{\det \mathbb{1}_n}_{=1 \text{ nach (D3)}}$$

Falls  $\lambda_k = 0$  und  $\lambda_i \neq 0$  für  $i > k$ , dann bringen wir die Zeilen  $k+1$  bis  $n$  auf Diagonalform. Damit lassen sich die Spalten  $k+1$  bis  $n$  von Zeile  $k$  austümmen.

$\Rightarrow$  Nullzeile  $\Rightarrow \det = 0$ .

(vi) bringe  $A$  durch Zeilenumformungen wie in (iii, iv) auf Zeilenstufenform  $\tilde{A}$ . Dann ist  $\tilde{A}$  obere Dreiecksmatrix mit  $\det \tilde{A} = \pm \det A$  und  $\text{rang } \tilde{A} = \text{rang } A$ . Wegen (v) ist  $\det \tilde{A} = 0 \Leftrightarrow \text{rang } \tilde{A} < n$ .

Proposition: Sei  $A \in K^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ wobei } A_1, A_2 \text{ quadratisch sind.}$$

Dann gilt  $\det A = (\det A_1) \cdot (\det A_2)$ .

Bew.: Bringe  $A_1$  durch elementare Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt  $\tilde{A}_1$ ,  $A_2$  bleibt unverändert, aus  $C$  wird  $\tilde{C}$ . Bei  $k$  Zeilenumtauschungen gilt  $\det \tilde{A}_1 = (-1)^k \det A_1$ . Dann bringen wir  $A_2$  auf Dreiecksform  $\tilde{A}_2$  und lassen  $\tilde{A}_1$  und  $\tilde{C}$  unberührt.  
 $\Rightarrow \det \tilde{A}_2 = (-1)^l \det A_2$  bei  $l$  Vertauschungen.

Ergebnis:  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{C} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}$  mit  $\det \tilde{A} = (-1)^{k+l} \det A$ .

$\tilde{A}$  ist eine obere Dreiecksmatrix. Nach dem vorherigen Satz, Punkt (v), gilt  $\det \tilde{A} = (\det \tilde{A}_1) \cdot (\det \tilde{A}_2)$ .  
Zuletzt Einsetzen von  $\det \tilde{A}$ ,  $\det \tilde{A}_1$ ,  $\det \tilde{A}_2$ .  $\square$

## c) Multiplikationssatz

Satz: (Multiplikationssatz für Determinanten)

Für alle  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Ist  $A \in GL(n; K)$ , d.h.  $A$  ist invertierbar, dann gilt:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Zum Beweis benötigen wir die „Elementarmatrizen“, die bei Multiplikation von links an  $A \in K^{n \times n}$  elementare Zeilenumformungen bewirken: ( $\rightarrow$  Aufgabe 7.5)

i) Multiplikation der Zeile  $i$  mit  $\lambda \neq 0$ :

$$S_i(\lambda) := \mathbb{1}_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_i$$

eine 1 bei  $(i,i)$ ,  
sonst 0

ii) Addition des  $\lambda$ -fachen der Zeile  $k$  zur Zeile  $i$ :

$$Q_{ik}(\lambda) := \mathbb{1}_n + \lambda E_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_i$$

nur eine 1 bei  $(i,k)$

Wegen  $Q_{ik}(\lambda) = S_k\left(\frac{1}{\lambda}\right) Q_{ik}(1) S_k(\lambda)$  können wir uns auf  $Q_{ik} := Q_{ik}(1)$  beschränken.



## Beweis des Multiplikationssatzes:

VL #20

Ist  $\text{rang } A < n$ , d.h.  $\dim \ker A > 0$ , so auch  $\text{rang}(AB) < n$ , und die Behauptung wird trivial:

$0 = 0 \cdot \det B$ . Sei also  $A \in GL(n; K)$ . Dann

gibt es Elementarmatrizen  $C_1, \dots, C_s$ , so daß

$A = C_1 \cdots C_s$ . Es genügt also, die Behauptung für

$A = S_i(\lambda)$  und  $A = Q_{ik}$  zu beweisen. Einerseits gilt nach

Satz 5.1b(vi):  $\det S_i(\lambda) = \lambda$  und  $\det Q_{ik} = 1$ .

Andererseits ist  $\det(S_i(\lambda)B) = \lambda \det B$  für beliebige  $B$

sowie  $\det(Q_{ik}B) = \det B$ . Damit gilt:

$$\det(AB) = \det(C_1 \cdots C_s B) = \det C_1 \cdot \det(C_2 \cdots C_s B)$$

$$= \dots = \left( \prod_{j=1}^s \det C_j \right) \cdot (\det B) = (\det A) \cdot (\det B) \quad \square$$

Korollar 1: Für  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt:  $\det(AB) = \det(BA)$

„Unter der Determinante dürfen Matrizen vertauscht werden.“

Korollar 2: Seien  $A \in K^{n \times n}$  und  $S \in GL(n; K)$ . Dann

ist  $\det A = \det(SAS^{-1})$ .

„Die Determinante ist invariant unter Basiswechsel.“

[vgl. §4.46 (3)]

Folgerung: Für  $f \in \text{End}(V)$  ist  $\det M_B(f)$  unabhängig

von der Wahl der Basis  $B$  [ $\rightarrow$  §5.4]