5 Determinanten

VL#19

5.1 Definition und Eigenschaften

a) Definition

Quadratische Matrizen haben neben dem Rang eine weitere Kennzahl, die invariant ist unter Basiswechsel: die Determinante. Anwendungen:

- Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme
- Volumenbestimmung eines Spats bzw. Parallelepipeds
- Orientierung eines Koordinatensystems

Def.: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $\det: K^{n \times n} \to K$, $A \mapsto \det A$, heißt **Determinante**, falls gilt:

(D1) $\det$ ist multilinear, d.h. linear in jeder Zeile von A.

(D2) $\det$ ist alternierend, d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.

(D3) $\det$ ist normiert, d.h. $\det \mathbb{1}_n = 1$.

Kurznotation: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bem.:

(1) „linear in jeder Zeile" heißt für jedes $1 \le i \le n$:

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, i-1 \text{ Zeilen} \\ \\ \}\, n-i \text{ Zeilen} \end{matrix}$$

für Zeilen $a_i, a_i' \in K^n$ und $\lambda \in K$.

(2) Existenz und Eindeutigkeit von det müssen gezeigt werden. (mühsam)

(3) Formeln für die Berechnung von $\det A$ sind relativ unübersichtlich und für große n aufwendig, ein effizientes Verfahren basiert auf dem Gauß-Algorithmus.

(4) Beispiele:

$n=1$: $\quad \det(a) = a$

$n=2$: $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$n=3$:

$$\det\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= \boxed{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}a_{23}a_{31} + \boxed{a_{13}a_{21}a_{32}}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - \boxed{a_{33}a_{21}a_{12}}$$

(Regel von Sarrus)

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{Streichen von Zeile 1, Spalte 1}} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace)

b) Eigenschaften

Aus der abstrakten Definition erhalten wir nützliche Rechenregeln für und Eigenschaften von Determinanten:

<u>Satz:</u> Seien $\det: K^{n\times n} \to K$ eine Determinante sowie $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

(i) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(ii) Ist eine Zeile von A gleich Null, so ist $\det A = 0$.

(iii)

$$\det \overbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}}^{A} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(Zeilenvertauschung)

Vorzeichenwechsel

(iv)

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad i \neq k.$$

(Addition des λ-fachen der Zeile k zur Zeile i.)

(v) Für eine obere Dreiecksmatrix gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

(Produkt der Diagonalelemente)

(vi) $\det A = 0 \iff \operatorname{rang} A < n$.

Bew.: (i) folgt direkt aus (D1). Ebenso (ii), da für jede lineare Abbildung $f(0)=0$ gilt.

(iii)
$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}\overset{(D2)}{=}$$
$$=\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}}_{0}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}+\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}}_{0}$$
$$\overset{(D1)}{=}\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i+a_k\\ \vdots\\ a_k+a_i\\ \vdots\end{pmatrix}\overset{(D2)}{=}0$$

(iv)
$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i+\lambda a_k\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}\overset{(D1)}{=}\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}+\lambda\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}}_{0}$$

(v) Sind alle $\lambda_i\neq 0$, dann führen wir Zeilenumformungen wie in (iv) durch, um die Matrix diagonal zu machen:
$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\overset{(iv)}{=}\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\overset{(D1)}{=}\lambda_1\cdots\lambda_n\underbrace{\det 1\!\!1_n}_{=1 \text{ nach (D3)}}.$$
Falls $\lambda_k=0$ und $\lambda_i\neq 0$ für $i>k$, dann bringen wir die Zeilen $k+1$ bis n auf Diagonalform. Damit lassen sich die Spalten $k+1$ bis n von Zeile k ausräumen.

$\Rightarrow$ Nullzeile $\Rightarrow \det = 0$.

(vi) Bringe A durch Zeilenumformungen wie in (iii, iv) auf Zeilenstufenform $\tilde{A}$. Dann ist $\tilde{A}$ obere Dreiecksmatrix mit $\det\tilde{A}=\pm\det A$ und $\operatorname{rang}\tilde{A}=\operatorname{rang}A$. Wegen (v) ist $\det\tilde{A}=0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}\tilde{A}<n$.

□

Proposition: Sei $A \in K^{n \times n}$, $n \geq 2$, von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$ wobei A_1, A_2 quadratisch sind.

Dann gilt $\det A = (\det A_1) \cdot (\det A_2)$.

Bew.: Bringe A_1 durch elementare Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt $\tilde{A}_1$, A_2 bleibt unverändert, aus C wird $\tilde{C}$. Bei k Zeilenvertauschungen gilt $\det \tilde{A}_1 = (-1)^k \det A_1$. Dann bringen wir A_2 auf Dreiecksform $\tilde{A}_2$ und lassen $\tilde{A}_1$ und $\tilde{C}$ unberührt.
$\Rightarrow$ $\det \tilde{A}_2 = (-1)^l \det A_2$ bei l Vertauschungen.

Ergebnis: $$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{C} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}$$ mit $\det \tilde{A} = (-1)^{k+l} \det A$.

$\tilde{A}$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Nach dem vorherigen Satz, Punkt (v), gilt $\det \tilde{A} = (\det \tilde{A}_1) \cdot (\det \tilde{A}_2)$.
Zuletzt Einsetzen von $\det \tilde{A}$, $\det \tilde{A}_1$, $\det \tilde{A}_2$. $\square$

c) Multiplikationssatz

<u>Satz:</u> (Multiplikationssatz für Determinanten)
Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Ist $A \in GL(n;K)$, d.h. A ist invertierbar, dann gilt:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Zum Beweis benötigen wir die „Elementarmatrizen", die bei Multiplikation von links an $A \in K^{n\times r}$ elementare Zeilenumformungen bewirken: (→ Aufgabe 7.5)

i) Multiplikation der Zeile i mit $\lambda \neq 0$:

$$S_i(\lambda) := \mathbb{1}_n + (\lambda - 1)\underbrace{E_{ii}}_{\text{eine 1 bei } (i,i),\ \text{sonst } 0} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} i \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

ii) Addition des λ-fachen der Zeile k zur Zeile i:

$$Q_{ik}(\lambda) := \mathbb{1}_n + \lambda \underbrace{E_{ik}}_{\text{nur eine 1 bei } (i,k)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & \cdots & \lambda \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Wegen $Q_{ik}(\lambda) = S_k(\tfrac{1}{\lambda})\, Q_{ik}(1)\, S_k(\lambda)$ können wir uns auf $Q_{ik} := Q_{ik}(1)$ beschränken.

iii) Vertauschen der Zeilen i und k:

$$P_{ik} := \mathbb{1}_n - E_{ii} - E_{kk} + E_{ik} + E_{ki} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & k & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Hier gilt: $P_{ik} = Q_{ki}\, Q_{ik}(-1)\, Q_{ki}\, S_k(-1)$

Zeile k: $a_k \mapsto -a_k + a_i =: \tilde{a}_k$

Zeile i: $a_i \mapsto a_i - \tilde{a}_k = a_k$

Zeile k: $\tilde{a}_k \mapsto \tilde{a}_k + a_k = a_i$

$\Rightarrow$ Alle elementaren Zeilenumformungen lassen sich aus $S_i(\lambda)$ und Q_{ik} kombinieren. Sie sind außerdem umkehrbar: $S_i(\lambda)^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$ für $\lambda \neq 0$ und $Q_{ik}^{-1} = Q_{ik}(-1)$.

<u>Lemma:</u> Jede invertierbare Matrix $A \in GL(n;K)$ ist endliches Produkt von Elementarmatrizen.

<u>Bew.:</u> $A \in GL(n;K) \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n$. Benutze Gauß-Algorithmus zur Matrixinversion: Umformen von $(A | \mathbb{1}_n)$ zu $(\mathbb{1}_n | A^{-1})$. Es gibt also Elementarmatrizen B_j $(j = 1, \dots, s)$, so daß $A^{-1} = B_s \dots B_1$ bzw.

$A = B_1^{-1} \dots B_s^{-1}$. (vgl. § 3.4) $\square$

<u>Beweis des Multiplikationssatzes:</u>

Ist rang $A < n$, d.h. dim ker $A > 0$, so auch rang $(AB) < n$, und die Behauptung wird trivial: $0 = 0 \cdot \det B$. Sei also $A \in GL(n;K)$. Dann gibt es Elementarmatrizen $C_1, \ldots, C_s$, so daß $A = C_1 \cdots C_s$. Es genügt also, die Behauptung für $A = S_i(\lambda)$ und $A = Q_{ik}$ zu beweisen. Einerseits gilt nach Satz 5.1b(vi): $\det S_i(\lambda) = \lambda$ und $\det Q_{ik} = 1$. Andererseits ist $\det(S_i(\lambda)B) = \lambda \det B$ für beliebige B sowie $\det(Q_{ik} B) = \det B$. Damit gilt:

$$\det(AB) = \det(C_1 \cdots C_s B) = \det C_1 \cdot \det(C_2 \cdots C_s B)$$
$$= \ldots = \left(\prod_{j=1}^{s} \det C_j\right) \cdot (\det B) = (\det A) \cdot (\det B) \qquad \square$$

<u>Korollar 1:</u> Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt: $\det(AB) = \det(BA)$

„Unter der Determinante dürfen Matrizen vertauscht werden."

<u>Korollar 2:</u> Seien $A \in K^{n \times n}$ und $S \in GL(n;K)$. Dann ist $\det A = \det(SAS^{-1})$.

„Die Determinante ist invariant unter Basiswechsel."

[vgl. §4.4b(3)]

<u>Folgerung:</u> Für $f \in \mathrm{End}(V)$ ist $\det M_{\mathcal{B}}(f)$ unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ [↗ §5.4]