Kapitel 1

Antinomien des naiven Mengenbegriffs und Auswege

Cantor's *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* [Cantor 1962] aus dem Jahre 1895 beginnen mit der berühmten Definition

> Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In diesem Sinne läßt sich von der Menge der Buchtitel eines Verlages, der Menge der Atome des Weltalls, der Menge aller reellen Zahlen, der Menge aller stetigen reellen Funktionen sprechen, usw. Dabei sind nicht nur naturgegebene Zusammenfassungen von Objekten gemeint, sondern gemeint ist vor allem der gedankliche Akt der beliebigen Zusammenfassung. Danach kann z.B. durchaus von der Menge bestehend aus einem Krokodil, der Zahl 7 und dem Planeten Jupiter gesprochen werden. Aber auch um derartige Mengen geht es in der Mengenlehre genau genommen gar nicht. Die materielle Natur der Elemente einer Menge ist für die Mathematik in der Regel gänzlich belanglos. Die Mengenlehre verschafft sich ihre Mengen nicht aus der physikalischen Realität, sondern mittels eigens postulierter Existenzprinzipien. Diese sind der Wirklichkeit zwar nachempfunden, aber sie gehen z.B. bei der Formulierung des Unendlichkeitsaxioms über die der physikalischen Erfahrung unmittelbar zugänglichen Wirklichkeit hinaus. Sie entsprechen aber weitgehend plausiblen Forderungen und ihre Akzeptanz wird nicht nur durch Intuition sondern vor allem durch ihren erfolgreichen Gebrauch in der Mathematik bestimmt.

1.1 Teilmengen und die Identität von Mengen

Ist ein Objekt x Element einer Menge a, schreibt man $x \in a$. Ist dies nicht der Fall, schreibt man $x \notin a$. Mengen sind selbst Objekte unserer Anschauung und unseres Denkens, können also Elemente von anderen Mengen sein. Dies ist sogar die Regel, denn ein beliebiges Objekt kann mit der Gesamtheit seiner Erscheinungsformen oder gedanklichen Eigenschaften identifiziert werden und ist insofern als Menge. Man kann allerdings auch einen anderen Standpunkt einnehmen und das Vorhandensein sogenannter *Urelemente* postulieren; es sind diese Objekte, die keine Mengen sind, aber Elemente von Mengen sein können. In der Mathematik kommt man jedoch ohne Urelemente aus. Dem trägt das mit ZFC bezeichnete System nach Zermelo–Fraenkel Rechnung (C von choice). In diesem entfällt eine Unterscheidung zwischen Mengen und sogenannten Mengensystemen oder Mengenfamilien. Elemente von Mengen sind stets wieder Mengen.

Unabhängig von dem soeben Gesagten ist streng zu unterscheiden zwischen einem Objekt (z.B. einer Menge a) und der Menge, deren einziges Element das Objekt a ist und die mit $\{a\}$ bezeichnet wird. $\{a\}$ enthält genau ein Element und wird daher ein *Singleton* oder eine *Einermenge* genannt.

Kleinbuchstaben $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ dienen uns im folgenden als Variable sowohl für Mengen als auch für deren Elemente. Dies mag im ersten Moment als unbehaglich empfunden werden; aber diese Bezeichnungsweise ist ökonomisch und unterstreicht den Wegfall einer Gattungsunterscheidung zwischen Mengen und ihren Elementen. Letzere sind prinzipiell immer auch Mengen.

Definition. a heißt *Teilmenge* von b, symbolisch $a \subseteq b$, wenn jedes Element von a auch Element von b ist. Formal notiert $a \subseteq b \;\Leftrightarrow\; \forall x(x \in a \to x \in b)$.

Diese sogenannte *Inklusionsbeziehung* hat die Eigenschaften

$$(1) \quad a \subseteq a, \quad (2) \quad a \subseteq b \subseteq c \to a \subseteq c, \quad (3) \quad a \subseteq b \wedge b \subseteq a \to a = b,$$

durch welche sich die Inklusion als partielle Ordnung auf der Klasse aller Mengen zu erkennen gibt (in 3.2 wird dies näher erläutert). (1) und (2) sind unproblematisch und unmittelbar klar. Dagegen bedarf (3) einer Diskussion.

Betrachten wir zunächst die zur Umkehrung von (3) gleichwertige Formel

$$(4) \quad a = b \to a \subseteq b \wedge b \subseteq a.$$

Diese besagt, daß identische Mengen dieselben Elemente enthalten, oder identische

Mengen sind *umfangsgleich*, wie man sich ausdrückt. Dies ist keine aus den Besonderheiten des Mengenbegriffs entspringende Eigenschaft, sondern gilt aus logischen Gründen, weil identische Objekte grundsätzlich dieselben Eigenschaften haben.

Hingegen kann man sich bei einer Argumentation für die Gültigkeit von (3) auf die Logik nicht berufen. Vielmehr formuliert (3), wie wir den Mengenbegriff zu verwenden wünschen. Kurzum, (3) ist ein Postulat oder ein Axiom, das für einen für uns nützlichen Mengenbegriff zu verlangen ist. Man spricht auch vom *Extensionalitätsaxiom*; wir formulieren dieses noch einmal explizit in der Weise

$$\mathsf{AE}: \quad \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b.$$

Dieses Axiom gibt eine erste Auskunft darüber, in welchem Sinne wir den Begriff „Menge" zu verwenden wünschen. Daher ist AE keine Tautologie. Aus dieser folgt zusammen mit AE $a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$, so daß in einer formalen Mengenlehre auf die Identität als Grundbegriff prinzipiell verzichtet werden könnte.

Von allen mengentheoretischen Axiomen ist AE das harmloseste. Mit der definierten Inklusionsbeziehung kann es auch formuliert werden als $a \subseteq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a = b$. Allen Betrachtungen über Mengen in diesem Kapitel wird stillschweigend die Gültigkeit des Extensionalitätsaxioms unterstellt. Auch wenn man der Ansicht ist, daß das Extensionalitätsprinzip bereits im Wesen des naiven Mengenbegriffs steckt, darf dies nicht zu dem Schluß verleiten, es sei gleichgültig, ob man dies hervorhebt oder nicht. Denn die Ausführungen im nächsten Abshnitt werden zeigen, daß man sehr wohl genötigt ist hervorzuheben, was naive Anschauung beinhaltet oder zu beinhalten scheint. Andernfalls kann es geschehen, daß man schon nach den ersten Schritten der Entwicklung einer Theorie in Widersprüche gerät.

Ist $a \subseteq b$, aber $a \neq b$ (d.h. es existiert ein $x \in b$, $x \notin a$), so heißt a eine *echte* Teilmenge von b, symbolisch $a \subset b$. Ist $a \subseteq b$ und $a \neq b$, so schreiben wir $a \subset b$ in der Regel aber nur dann, wenn $a \neq b$ besonders betont werden soll.

Übungen

1. Eine 2-stellige Relation $\lessdot$ auf einer Mengen M (alles in naivem Sinne) heißt *extensional*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat, die z.B. auf die naive $\in$-Relation, aber z.B. auch auf echte Teilerrelation natürlicher Zahlen zutrifft:

   für alle $a, b \in M$: wenn $x \lessdot a \Leftrightarrow x \lessdot b$ für alle $x \in M$, so ist $a = b$.

   Man gebe eine nicht extensionale Relation auf einer 3-elementigen Menge an. Damit ist rigoros nachgewiesen worden, daß AE kein logisches Axiom ist.

1.2 Die Antinomien naiver Mengenbildung

Wir stellen zunächst fest, daß das Wesentliche des Cantor'schen Mengenbegriffs die beliebige Zusammenfassung ist, und welches wir das naive *Mengenbildungsprinzip* nennen wollen. Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die auf ein beliebiges Objekt a entweder zutrifft – in diesem Falle schreiben wir $\mathcal{E}(a)$ – oder nicht. Wir werden in 1.4 den Begriff der Eigenschaft präzisieren. Vorerst sei darunter ein beliebiger sprachlicher Ausdruck verstanden, der etwas über unbestimmte Objekte x besagt. Das naive Mengenbildungsprinzip besagt, daß man die Menge a aller Objekte m mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ bilden kann. Diese ist aufgrund des Extensionalitätsprinzips eindeutig bestimmt und sei mit $\{x \mid \mathcal{E}(x)\}$ bezeichnet. Danach darf z.B. die Menge $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$ gebildet werden. Weil grundsätzlich jedes Objekt a die Eigenschaft $a = a$ hat, enthält $\emptyset$ keine Elemente. Offenbar ist $\emptyset \subseteq a$ für alle Mengen a.

Man könnte natürlich einwenden, daß die ursprüngliche Wortbedeutung von 'Menge' eine nichtleere Gesamtheit meint. Aber in der Mathematik ist es üblich, gewisse Worte aus der Umgangssprache zu entlehnen und ihre Bedeutung einer zweckdienlichen Konvention zu unterwerfen. Statt „Die Menge der Lösungen der Gleichung $x^2 - x + 1 = x(x-1)$ ist leer“ könnte man auch sagen „Eine Menge von Lösungen dieser Gleichung existiert nicht“, und ähnliche Formulierungen in analogen Zusammenhängen gebrauchen. Dies würde lediglich sprachliche Umständlichkeiten verursachen. Diese wären von derselben Qualität wie eine durchaus mögliche Konvention dahingehend, daß 0 keine reelle Zahl sei.

Nach dem naiven Mengenbildungsprinzip müßte auch die *universelle Menge* existieren, die Menge aller Mengen. Ferner darf auch die Menge $\mathcal{R} := \{a \mid a \notin a\}$ gebildet werden, d.h. die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, und zwar unabhängig von der Frage, ob es überhaupt Mengen gibt, die sich eventuell selbst als Elemente enthalten. $\mathcal{R}$ heiße die *Russell'sche Menge.*

Mit Hilfe von $\mathcal{R}$ werden wir jetzt einen Widerspruch herleiten – die sogenannte *Russell'sche Antinomie*[1)] Wir stellen zunächst fest, daß für beliebige Mengen a

$$(*) \quad a \in \mathcal{R} \leftrightarrow a \notin a.$$

[1)] B. Russell (1872–1970) teilte seine Entdeckung in einem Brief an G. Frege (1848–1925) mit. Frege hat dann die diese Antinomie in der Ausgabe seiner *Grundgesetze der Arithmetik* aus dem Jahre 1903 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht, obwohl die Antinomie seine eigene Begründung dieser Grundgesetze in Frage stellte.

Wählt man $\mathcal{R}$ für a, so ergibt sich hieraus

$$(**) \quad \mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}.$$

Nun ist entweder $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ oder $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$. Nimmt man $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ an, so folgt $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ nach $(**)$, also ein Widerspruch. Daher kann nur $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ gelten. Das ergibt aber $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ mit $(**)$, also wiederum einen Widerspruch. Das uneingeschränkte Mengenbildungs-Prinzip ist folglich inkonsistent. Der tiefere Grund ist der, daß die Definition von $\mathcal{R}$ auf die Gesamtheit aller Mengen Bezug nimmt, einschließlich auf $\mathcal{R}$ selbst. Dadurch gerät man in eine Art circulus vitiosus.

Hier noch eine zweite Antinomie. Eine Menge a heiße *fundiert*, wenn es keine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ gibt mit $\ldots a_3 \in a_2 \in a_1 \in a$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller fundierten Mengen. Ist $\mathcal{F}$ fundiert? Falls ja, so ist $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$, und wir enthalten eine unendliche Folge $\ldots \in \mathcal{F} \in \mathcal{F} \in \mathcal{F}$, also ist $\mathcal{F}$ nicht fundiert – Widerspruch. Ist $\mathcal{F}$ nicht fundiert, so ist $\ldots a_2 \in a_1 \in \mathcal{F}$ für eine gewisse nichtabbrechende Folge. Dann aber ist auch a_1 nicht fundiert, d.h. $\mathcal{F}$ enthält die nicht fundierte Menge a_1 – Widerspruch, denn war die Menge aller fundierten Mengen.

Bemerkung. Fundierte Mengen a lassen sich auch direkt, ohne Benutzung des Folgenbegriffs als diejenigen erklären, für die die auf a eingeschränkte $\in$-Relation fundiert ist im Sinne von Übung 2. Näheres über fundierte Mengen enthält Kapitel 2.

Übungen

1. Das naive Mengenbildungsprinzip werde zum naiven Aussonderungsprinzip eingeschränkt: *Zu jeder Menge v und jeder Eigenschaft $\mathcal{E}$ existiert die Menge aller $x \in v$ mit $\mathcal{E}(x)$.* Man zeige, dieses hat zur Folge, daß die Gesamtheit $\mathcal{V}$ aller Mengen kann keine Menge sein kann.

   Hinweis. Wäre $\mathcal{V}$ Menge, kann $\mathcal{R}$ ausgesondert werden.

2. Eine (2-stellige) Relation $\lessdot$ auf einer Menge a heiße *fundiert*, wenn jede nichtleere Teilmenge $u \subseteq a$ ein $\lessdot$-minimales Element enthält, d.h. es gibt ein $x \in u$ mit $y \in a \setminus u$ für alle $y \lessdot x$. Man zeige in naiver Weise, diese Definition ist äquivalent mit der folgenden: es gibt keine Folge $x_0, x_1, \ldots$ mit $x_i \in a$ und

   $$\ldots x_2 \lessdot x_1 \lessdot x_0.$$

   Hinweis. Hat eine nichtleere Teilmenge $u \subseteq a$ kein minimales Element, wähle ein $x_0 \in u$, dann ein $x_1 \lessdot x_0$ usw.

1.3 Wege zur Vermeidung der Antinomien

Wie kann man den genannten und möglichen anderen Antinomien entgehen? Es liegt auf der Hand, daß dies, wenn überhaupt, nur durch eine Einschränkung der naiven Mengenbildung verhindert werden kann. Hier gibt es nun durchaus unterschiedliche Wege. So hat Russell zu Beginn des Jahrhunderts, wenn auch mit ursprünglich anderen Zielsetzungen, den sogenannten *stufentheoretischen Aufbau* der Mengenlehre entwickelt. Grundgedanke ist eine Unterscheidung zwischen Urelementen, Mengen von Urelementen, (= Mengen 1. Stufe), Mengen von Mengen 1. Stufe (= Mengen 2. Stufe), usw. Wegen gewisser technischer Komplikationen ist der Stufenaufbau im praktischen Umgang mit Mengen bald in den Hintergrund gedrängt worden. Gewisse Schwierigkeiten ergeben sich z.B. für eine zügige Theorie der Ordinal– und Kardinalzahlen. Keine dieser Schwierigkeiten ist jedoch grundsätzlicher Natur.

Eine ausschließlich die Mengenlehre (und nicht die Mathematik insgesamt) betreffende Axiomatisierung wurde zuerst von Zermelo in den angegeben und etwas später von Fraenkel ergänzt [2)]. Dieses heute meist verwendete System werden auch wir hier zugrundelegen.

Man kann die Zermelo'sche Mengenlehre in zwei Varianten präsentieren, je nachdem, ob man Urelemente zuläßt oder nicht. Es ist jedoch technisch einfacher, Urelemente auszuschließen; darüberhinaus ist eine solche Vorgehensweise völlig ausreichend für die Mathematik. Schließlich ist sie auch philosophisch plausibel, weil Urelemente ihre Mengeneigenschaft möglicherweise nur „verbergen". Wichtigstes Argument aber ist, daß Mengenlehre ohne Urelemente nachweislich ebenso leistungsfähig ist wie eine Mengenlehre, in der die Existenz von Urelementen nicht ausgeschlossen wird. Man kann eine Mengenlehre mit Urelementen auf der Basis von ZF modellieren. Also ist der Ausschluß von Urelementen keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Nach der Entdeckung der mengentheoretischen Antinomien hat sich die Gewohnheit entwickelt, definierbare Gesamtheiten, über deren Mengencharakter man sich nicht (oder noch nicht) im klaren ist, *Klassen* zu nennen, insbesondere also von der *Klasse aller Mengen* zu reden. Auch wir folgen dieser Gewohnheit, obwohl grundsätzlich darauf verzichtet werden kann, weil ja innerhalb des Zermelo'schen Systems nur von Mengen die Rede ist. Was in diesem Zusammenhang das Wort *definierbar* bedeutet,

[2)] Ernst Zermelo (1871–1953), Math. Annalen 1906. A. Fraenkel (1891–1965), Math. Annalen 1922. Es sollte gerechterweise hinzugefügt werden, daß die Ergänzung des Zermelo'schen Systems schon wenig vorher durch D. Mirimanov und unabhängig von Fraenkel auch von T. Skolem vorgeschlagen wurden.

wird im nächsten Abschnitt genau präzisiert.

Der Unterscheidung zwischen Mengen und Klassen trägt das axiomatische System NGB (von Neumann – Gödel – Bernays) Rechnung. Dieses formale System redet direkt über Klassen. Mengen sind diejenigen Klassen, die Element wenigstens einer Klasse sind. Siehe hierzu etwa [Friedrichsdorf/Prestel 1985].

Außer den bisher erwähnten Systemen gibt es noch weitere, vornehmlich gewisse Varianten der oben angegebenen. Mit dem Vergleich der Leistungsfähigkeit dieser Systeme befaßt man sich heute kaum noch. Die grundsätzlichen Fragen sind geklärt. Diese Systeme leisten das Gleiche.

1.4 Die Sprache $\mathcal{L}_\in$ der Mengenlehre – Klassen

Eine exakte Formulierung einiger mengentheoretischer Axiome erfordert die Präzisierung der sprachlichen Ausdrucksmittel von $\mathcal{L}_\in$. Das geschieht wie folgt:

Ausgehend von den *Variablen* $v_0, v_1, v_2, \ldots$, den *Prädikatzeichen* $=$ [3] und $\in$ und den *logischen Symbolen* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall$ definiert man *Formeln* als spezielle Zeichenfolgen gemäß folgenden Festlegungen:

(a) Sind x, y Variable, so sind $x = y$ und $x \in y$ Formeln, sogenannte *Primformeln.*

(b) Sind φ, ψ Formeln und ist x eine Variable, so sind $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, sowie $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ Formeln.

Diese beiden Klauseln sind so zu verstehen, daß in diesem Zusammenhang lediglich die mit ihrem Gebrauch zu gewinnenden Zeichenfolgen Formeln von $\mathcal{L}_\in$ sind.

Man schreibt $x \neq y$ für $\neg x = y$, und $x \notin y$ für $\neg x \in y$, sowie $(\exists x \in a)\varphi$ für $\exists x(x \in a \wedge \varphi)$ und $(\forall x \in a)\varphi$ für $\forall x(x \in a \rightarrow \varphi)$. Analog stehe $(\exists x \subseteq y)\varphi$ für $\exists x(x \subseteq y \wedge \varphi)$. Nicht nur Zeichenfolgen der Form $\exists x$ oder $\forall x$ sondern auch solche der Gestalt $(\exists x \in a)$, $(\forall x \in a)$ werden als *Präfixe* bezeichnet.

Außenklammern in fertig vorliegenden Formeln werden weggelassen. Zwecks weiterer Klammer-Ersparnis verabreden wir, daß in der Reihenfolge $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ jedes Symbol stärker trennt als die vorherigen, so wie $+$ stärker trennt als $\cdot$. Auch wird

[3] Das Symbol $=$ unterscheidet sich von dem metasprachlichen Gleichheitszeichen $=$ durch leichten Fettdruck, um Verwechslungen zu verhindern.

z.B. $(\forall xy \in a)\varphi$ für $\forall x(x \in a \wedge y \in a \to \varphi)$ geschrieben. Welche Abkürzungen auch immer verwendet wird, wesentlich ist, daß die gemeinte Formel eindeutig identifiziert werden kann.

Man könnte die Anzahl der logischen Grundsymbole von $\mathcal{L}_\in$ erheblich reduzieren. Besonders bequem vom formal-logischen Standpunkt aus ist z.B. die Wahl der logischen Grundsymbole $\neg$, $\wedge$, $\forall$. Weitere Symbole wie $\vee$, $\exists$ werden dann durch geeignete Definitionen eingeführt, siehe etwa [Rautenberg 1995].

Der Formelaufbau verläuft in etwa parallel der natürlichen Sprechweise, so daß sich der Sinn kürzerer Formeln schnell entschlüsseln läßt. Dabei hat man sich vorzustellen, daß der Variablenbereich die Gesamtheit aller Mengen ist und Variable in diesem Zusammenhang nichts anderes als Mengen bezeichnen. Z.B. ist der Sinn der Formel $\neg\exists x x \in y$ der, daß die Menge y keine Elemente enthält. Dabei vertreten x, y irgend zwei Variable aus unserer kanonischen Variablenliste, wie auch andere Kleinbuchstaben irgend welche Variablen vertreten. Aus dem Kontext geht stets hervor, ob verschiedene Buchstaben tatsächlich verschiedene Variable meinen.

Die Variable x ist in $\neg\exists x x \in v$ gebunden, während v dort frei vorkommt. Eine Variable *x kommt in φ frei vor*, wenn sie an wenigstens einer Stelle ihres Vorkommens in φ frei vorkommt, d.h. an dieser Stelle nicht von einer Subformel der Gestalt $\forall x\psi$ oder $\exists x\psi$ überdeckt wird. Formeln, in denen keine Variable frei vorkommt, heißen *Aussagen*. So ist $\forall x\exists y x \in y$ eine Aussage; sie besagt, daß jede Menge x auch Element einer gewissen Menge y ist. Aussagen geben Sachverhalte über Mengen wieder, während eine Formel φ mit der freien Variablen v eine Eigenschaft von v definiert. So definiert z.B. $\exists x x \in v$ die Eigenschaft von v, nicht leer zu sein.

Die Schreibweise $\varphi(v)$ für eine Formel φ soll bedeuten, daß das eventuell freie Vorkommen der Variablen v in φ besonders hervorgehoben werden soll. Ist in einem solchen Zusammenhang gleichzeitig von $\varphi(v')$ die Rede, meint man hiermit die aus $\varphi(v)$ dadurch entstehende Formel, daß v an den Stellen des freien Vorkommens in φ durch v' ersetzt wird. φ kann nebst v noch weitere freie Variable enthalten. Diese heißen oft die *Parameter* oder *Parametervariablen*.

Unter der *Generalisierten* einer Formel φ versteht man die Aussage $\forall x_1 \dots \forall x_n\varphi$. Dabei ist $x_1, \dots, x_n$ eine Aufzählung der freien Variablen von φ in irgendeiner kanonischer Reihenfolge, z.B. nach aufsteigenden Indizes der Variablen. So ist $\forall x\forall y x \in y$ die Generalisierte von $x \in y$.

Die Formel $\exists v(\varphi(v) \wedge \forall u(\varphi(u) \to u = v))$ werde durch $\exists! v\varphi$ abgekürzt (gelesen: *es gibt genau ein v mit $\varphi(v)$*). Eine kürzere, mit $\exists! v\varphi(v)$ logisch äquivalente Formel ist

$\exists v \forall u(\varphi(u) \leftrightarrow u = v)$.

Eine durch eine $\mathcal{L}_\in$–Formel beschreibbare Eigenschaft heißt (in $\mathcal{L}_\in$) *definierbar* oder kurz eine *definite Eigenschaft*. Um den Antinomien zu entgehen, wird man die Gesamtheit aller Mengen, welche eine gegebene definite Eigenschaft haben, nicht ohne weiteres als Menge bezeichnen dürfen. Das zeigt die Russell'sche Antinomie.

Man nennt die Gesamtheit aller Mengen, welche eine durch $\varphi(v)$ definierte Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben, eine *Klasse* und bezeichnet diese mit $\{v \mid \varphi(v)\}$ oder $\{v \mid \mathcal{E}(v)\}$. Der Term $\{v \mid \varphi\}$ heißt ein *Klassenterm*. Er gehört aber nicht zur formalen Theorie sondern soll nur die durch $\varphi(v)$ definierte Eigenschaft bezeichnen. Zwischen definiten Eigenschaften und Klassen machen wir keinen Unterschied, d.h. der Klassenterm $\{v \mid \varphi\}$ bezeichnet eben auch die Klasse aller Mengen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$. Ist $\mathcal{C} := \{v \mid \varphi(v)\}$ eine Klasse, so sei $x \in \mathcal{C}$ nur eine andere Schreibweise für $\varphi(x)$. Diese scheinbare Umständlichkeit wird sich auszahlen. Hier eine kleine Liste von Beispielen für Klassen. Man beachte, daß z.B. in der 5. Zeile $(\exists x \in \mathcal{C}) v \in x$ nur eine andere Schreibweise für $\exists x(x \in \mathcal{C} \wedge v \in x)$, d.h. für $\exists x(\varphi(x) \wedge v \in x)$ ist.

$\mathcal{R} = \{v \mid v \notin v\}$ – die Russell'sche Klasse.

$\mathcal{V} = \{v \mid v = v\}$ – die Klasse aller Mengen, auch *Allklasse* genannt.

$\mathcal{V}^{(1)} = \{v \mid (\exists x \in v)(\forall y \in v) y = x\}$ – die Klasse der Einermengen.

$\{a, b\} = \{v \mid v = a \vee v = b\}$ – die *Paarklasse* aus a, b.

$\cup \mathcal{C} = \{v \mid (\exists x \in \mathcal{C}) v \in x\}$ – die *Vereinigungsklasse* von $\mathcal{C}$

$\cap \mathcal{C} = \{v \mid (\forall x \in \mathcal{C}) v \in x\}$ – die *Durchschnittsklasse* von $\mathcal{C}$.

$\mathfrak{P}(a) = \{v \mid v \subseteq a\}$ – die Klasse aller Teilmengen von a.

$\mathcal{T}r = \{v \mid x \in y \in v \rightarrow x \in v\}$ – die Klasse aller *transitiven* Mengen.

Skriptbuchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ bezeichnen Klassen. Sie sind keine Variablen unserer formalen Mengentheorie. Für $\mathcal{A} := \{v \mid \varphi\}$, $\mathcal{B} := \{v \mid \psi\}$, setzt man $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, falls die $\mathcal{L}_\in$–Aussage $\forall v(v \in \mathcal{A} \leftrightarrow v \in \mathcal{B})$, d.h. nach obiger Konvention $\forall v(\varphi \leftrightarrow \psi)$, aus den mengentheoretischen Axiomen beweisbar ist. Für diesen erweiterten Gebrauch von $=$ sind übliche Eigenschaften wie z.B. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C}$ ohne Rückgriff auf Mengenaxiome allein mit den Regeln der Logik leicht beweisbar.

Eine vorteilhafte Konvention ist auch die Schreibweise $a = \mathcal{A}$ für $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in \mathcal{A})$, d.h. für $\forall x(x \in a \leftrightarrow \varphi)$. Auch das geht konform mit den Identitätsgesetzen. So ist z.B. $a = \{v \mid v \in a\}$ trivial beweisbar. Denn dies heißt $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in \{x \mid x \in a\}$ und damit lediglich $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in a)$. Ebenso ist z.B. $\mathcal{A} = a \wedge \mathcal{A} = b \rightarrow a = b$ beweisbar. Denn die Prämissen besagen $\forall x(x \in \mathcal{A} \leftrightarrow x \in a)$, $\forall x(x \in \mathcal{A} \leftrightarrow x \in b)$ und hieraus folgt $a = b$ nach dem Extensionalitätsaxiom.

Für Klassen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ verwendet man die Inklusionsbeziehung $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ wie für Mengen. So ist z.B. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ für jede Klasse $\mathcal{C}$. Ferner erklärt man *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplement* von Klassen $\mathcal{A} := \{v \mid \varphi(v)\}$ und $\mathcal{B} := \{v \mid \psi(v)\}$ wie folgt:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{v \mid \varphi \vee \psi\}, \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{v \mid \varphi \wedge \psi\}, \quad \setminus \mathcal{A} = \{v \mid \neg\varphi\}.$$

Dann sind die üblichen Regeln der Mengenalgebra auch für beliebige Klassen leicht beweisbar, Übung 1. Sie gelten dann insbesondere für Mengen. Tatsächlich ist der Gebrauch von Klassen in der Mengentheorie nur ein Mittel zur geeigneten linguistischen Verkleidung von $\mathcal{L}_\in$-Aussagen. Sprachpartikel wie '$a \in \mathcal{A}$', '$b = \mathcal{B}$', usw. lassen sich aufgrund obiger Konventionen nicht nur als mengentheoretische d.h. $\mathcal{L}_\in$–Aussagen deuten, sondern sie sind es. Betrachten wir als Beispiel die Aussage 'die Klasse $\mathcal{R}$ ist eine Menge'. Dies kann nur verstanden werden als die Aussage $\exists r\, r = \mathcal{R}$, d.h. $\exists r\, \forall v(v \in r \leftrightarrow v \in \mathcal{R})$, und ausführlich, $\exists r\, \forall v(v \in r \leftrightarrow v \notin v)$. Diese impliziert bekanntlich einen Widerspruch, womit nach den Regeln der Logik $\neg\exists r\, r = \mathcal{R}$ bewiesen wurde, die linguistische Verkleidung der $\mathcal{L}_\in$-Aussage $\neg\exists r\, \forall v(v \in r \leftrightarrow v \notin v)$. Dies ist ein lehrreiches Beispiel dieser überaus hilfreichen façon de parler. Sie gestattet es, mengentheoretische Sätze anschaulich und prägnant zugleich zu formulieren. Das kommt daher, daß sich Klassen in ihrer linguistischen Rolle fast genauso verhalten, als seien sie selbst Mengen. Es ist nicht verboten, sondern eher geraten, sich Klassen als Objekte vorzustellen. Nur sind sie eben keine Objekte unserer Theorie. Aussagen über Klassen sind in Wahrheit also wohlbestimmte $\mathcal{L}_\in$–Aussagen.

Übungen

1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Klassen. Man zeige

   $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}; \quad \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}; \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A};$

   $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}; \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \alpha;$

   $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}); \quad \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C});$

   $\setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \setminus \mathcal{A} \cap \setminus \mathcal{B}, \quad \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \setminus \mathcal{A} \cup \setminus \mathcal{B}; \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} = B.$

   Hinweis. Sei etwa $\mathcal{A} = \{x \mid \varphi(x)\}$, $\mathcal{B} = \{x \mid \psi(x)\}$. Dann bedeuten $x \in \mathcal{A} \cup B$ dasselbe wie $\varphi(x) \vee \psi(x)$ und $x \in \mathcal{B} \cup A$ dasselbe wie $\psi(x) \vee \varphi(x)$.

2. Man zeige die Gleichwertigkeit folgender Eigenschaften für alle Mengen a:

   $$\text{(a) } a \text{ ist transitiv}, \quad \text{(b) } b \in a \rightarrow b \subseteq a, \quad \text{(c) } \bigcup a \subseteq a.$$

3. Zeige $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$. (Vorerst ist $a \cup b$ nur eine Klasse.)

1.5 Spracherweiterung von $\mathcal{L}_\in$

Wir werden uns im folgenden unbefangen einer üblichen Praxis bei der axiomatischen Entwicklung einer Theorie bedienen, nämlich Bezeichnungen wohldefinierter Objekte in die Theorie einzubeziehen und die Ursprache $\mathcal{L}_\in$ auf diese Weise schrittweise zu erweitern. Solche Symbole werden z.B. sein:

(a) *Prädikatensymbole*, z.B. $\subseteq$;

(b) *Individuensymbole* (*Konstanten* genannt), z.B. $\emptyset$ und ω;

(c) *Operationssymbole*, z.B. $\mathfrak{P}$ und $\bigcap$.

In den Formeln werden dann diese und andere definierte Symbole erscheinen. Es ist nun wichtig, daß man diese aus den Formeln auf kanonische Weise auch wieder entfernen kann. Es läßt sich nämlich durch rein syntaktische Betrachtungen nachweisen, daß diese Spracherweiterungen unter Beachtung naturgegebener Bedingungen harmlos, genauer gesagt, *konservativ* sind, d.h. es ist unmöglich, durch logische Manipulation in der erweiterten Sprache $\mathcal{L}'_\in$ Aussagen der Ursprache $\mathcal{L}_\in$ zu beweisen, die nicht schon im Rahmen von $\mathcal{L}_\in$ selbst beweisbar wären. Ein Verdacht, daß in den erweiterten Sprachen z.B. mehr Mengen der Form $\{x \in a \mid \varphi\}$ ausgesondert werden, falls $\mathcal{L}_\in$ außer $=, \in$ noch definierte Symbole enthält, ist also unbegründet.

Tatsächlich ließe sich die Entwicklung der Theorie gänzlich in $\mathcal{L}_\in$ vollziehen, so daß die Verwendung definierter Symbole eine äußerliche Angelegenheit eines riesigen Abkürzungsunternehmens bliebe. Aber es ist viel übersichtlicher, die Sprache $\mathcal{L}_\in$ um definierte Symbole schrittweise zu erweitern und definierte Symbole explizit in der Theorie zu benutzen. Unabhängig davon ist angeraten, auch einige weitere definierte logische Symbole in den Formalismus einzubeziehen. Wir erwähnten schon $\exists x!$ (es gibt genau ein). Ebenso nützlich ist der Quantor $\exists^{\leqslant 1}$ (es gibt höchstens ein y). Es sei $\exists^{\leqslant 1} y\varphi(y) := \forall y \forall y'(\varphi(y) \wedge \varphi(y') \to y = y')$.

Bedingungen für die Einführung von Prädikatensymbolen gibt es keine. Diese beziehen sich ausschließlich auf (b) und (c). Zu diesem Zweck ist es bequem, Konstanten als 0-stellige Operationssymbole zu bezeichnen. Dann läßt sich eine einzige Vorsichtsmaßnahme zur Sicherung des konservativen Charakters der Spracherweiterung in einheitlicher Weise wie folgt formulieren:

($*$) Ein n–stelliges Operationssymbol F, definiert durch die Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ darf dann eingeführt werden, wenn vorher $\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$ bewiesen wurde.

Dabei steht $\vec{x}$ für $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 0$, wobei f höchstens $x_1, \ldots, x_n$, y frei enthält. Die Beweisbarkeit von $\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$ ist gleichwertig mit der von $\forall\vec{x}\exists! y\varphi$, wobei $\forall\vec{x}$ abkürzend für $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ steht.

Beispiele. Als definierende Formel $\varphi(v)$ für $\emptyset$ bietet sich $\neg\exists x(x \in v)$ an. Schon die beiden ersten Axiome von AE und AS werden es gestatten, $\exists! v\varphi(v)$ zu beweisen. Das sogenannte Potenzmengenaxiom wird lauten $\exists a\, a = \{x \mid x \subseteq a\}$, oder ausführlicher $\exists y \forall z(z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$. Bezeichnet $\varphi(x, y)$ diese Formel, so wird sich zeigen, daß wiederum $\exists! y\varphi(x, y)$ beweisbar ist. Damit dürfen wir ein Operationssymbol für dieses, durch x eindeutig bestimmte Objekt y einführen, und das wird $\mathfrak{P}$ sein.

Bedingung $(*)$ sichert nach Hinzufügen der Generalisierten der Definition

$$(\delta) \quad F(\vec{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$$

zur Theorie den konservativen Charakter der Spracherweiterung. Mit (δ) läßt sich F aus den Formeln in äquivalenter Weise nämlich schrittweise wieder eliminieren, siehe hierzu etwa [Rautenberg 1995, Kapitel **2.6**]. Umgekehrt liefert (δ) durch Substitution von $F(x)$ für y offenbar $\varphi(\vec{x}, F(\vec{x}))$, also $\exists y\varphi$ und sogar $\exists! y\varphi$.

In einer durch explizite Definitionen von Operationszeichen erweiterten Sprache haben Primformeln die Gestalt $t = s$ und $t \in s$, wobei t, s Variable oder durch definierte Operationszeichen zusammengesetzte Terme sind. Zwecks Nachweises des konservativen Charakters der Spracherweiterung genügt es die zusätzlichen Operationssymbole aus Primformeln dieser Art zu eliminieren. Weil offenbar

$$t = s \leftrightarrow \exists y(t = y \wedge s = y), \quad \tau \in \sigma \leftrightarrow \exists y \exists z(t = y \wedge s = z \wedge y \in z),$$

kann dies schrittweise geschehen. Wir wollen uns aber mit einem rigorosen Beweis dieser Art nicht aufhalten, weil dies ein rein technisches Problem ist, das mit der Mengenlehre nichts zu tun hat sondern die formale Logik betrifft.

Es ist bequem, auch die Einführung von Symbolen für partielle Operationen zu gestatten, z.B. für den einstelligen Operator $\bigcap$ - man beachte $\bigcap\emptyset$ ist keine Menge sondern die Allklasse. Die Einführung eines derartigen, sagen wir gleich n–stelligen Symbols F, läßt sich mit einem Trick rechtfertigen. Für die definierende Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ für F gilt natürlich mindestens $\exists^{\leqslant 1}\varphi(\vec{x}, y)$. Anstatt durch φ werde F eingeführt vermittels der definierenden Formel

$$\varphi'(\vec{x}, y) := \varphi(\vec{x}, y) \vee \neg\exists z\varphi(\vec{x}, z) \wedge y = \emptyset,$$

für die $\exists! y\varphi'(\vec{x}, y)$ sicher beweisbar ist. Dadurch wird F künstlich eine totale Operation. Es empfielt sich, eine derart willkürliche, oft sogar störenden Resultate liefernde

Erweiterung von F gar nicht zu erwähnen oder sie zumindest anschließend wieder zu vergessen. So kann durch keine Erklärung von $\bigcap s$ für $s = \emptyset$ das Distributivgesetz $x \cup \bigcap s = \bigcap\{x \cup y \mid y \in s\}$ gerettet werden. Bei dieser Vorgehensweise sind dann allerdings nur *legitime* Substitutionen des Terms $Ft_1 \dots t_n$ erlaubt (wo $t_1, \dots, t_n$ andere, F nicht enthaltende Terme sind): Ist $\psi(z)$ eine Formel, so heiße die Substitution $\psi(Ft_1 \dots t_n)$ *legitim*, wenn vorher

$$\psi(z) \to \exists y\varphi(t_1, \dots, t_n, y)$$

bewiesen wurde. Ist z.B. $\psi(z)$ die Formel $\exists x\, x = z$, so ist $\psi(\bigcap s)$ $(= \exists x\, x = \bigcap s)$ in diesem Sinne nicht legitim; denn ψ ist eine Tautologie, während $\psi(\bigcap s)$ für $s = \emptyset$ falsch ist. Wir liberalisieren $(*)$ demnach wie folgt:

Ein n–stelliges Operationssymbol F darf durch eine Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ eingeführt werden, wenn $\exists^{\leqslant 1} y\varphi(\vec{x}, y)$ beweisbar ist. Dabei ist auf Legitimität in Substitutionen mit einem mit f beginnenden Term zu achten.

Wir nennen einstellige partielle Operationen auch *Abbildungen.* Eine solche Sprachreglung ist aber nicht allgemeinverbindlich und es kann gut sein, daß andere Autoren das Wort Abbildung auch synonym mit Funktion verwenden, d.h. als Gattungsnamen für die mengentheoretisch definierten Funktionen. Ist F eine durch $\varphi(x, y)$ definierte Abbildung, so sei $\mathit{dom}\ F = \{x \mid \exists y\varphi(x, y)\}$, der *Definitionsbereich* von F. Wir schreiben später zuweilen auch einfach $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ für die Mitteilung

$$(\forall x \in \mathcal{A})(\exists! y \in \mathcal{B})\varphi(x, y).$$

$\tau := \{v \mid \varphi\}$ heiße ein *Mengenterm*, wenn $\exists y\ y = \tau$, d.h. $\exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow \varphi)$ beweisbar ist. Diese dürfen stets als formale Objekte der Theorie angesehen werden. Mengenterme dürfen nämlich anders als beliebige Klasssenterme τ für freie Variable stets eingesetzt werden. Denn für $\psi = \psi(y)$ ist $\psi(\tau)$ logisch gleichwertig mit $\exists y(\psi \wedge y = \tau)$. Das impliziert $\exists y y = \tau$, d.h. τ ist ein Mengenterm. Diese Bedingung ist also eine notwendige für die unbeschränkte Termeinsetzung. Daß sie auch hinreicht, läßt sich völlig auf die Rechtfertigung von $(*)$ zurückführen: Weil wegen AE nämlich $\exists! y\ y = \tau$ beweisbar ist, bezeichnet τ ein wohlbestimmtes Element, falls φ außer v keine freien Variablen enthält, sonst aber das jeweilige Ergebnis einer ein– oder mehrstelligen Operation auf $\mathcal{V}$. Z.B. liefert der Term $\{v \mid v = x \vee v = y\}$ die Operation $\{,\}$ der Paarbildung wie im nächsten Kapitel nachgewiesen wird.

Ist $\{v \mid \varphi\}$ ein beliebiger Mengenterm und ist $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ das Tupel der von v verschiedenen freien Variablen in $\varphi = \varphi(v, \vec{x})$ in kanonischer Reihenfolge, so definiert

$$\varphi'(\vec{x}, y) := \forall v(v \in y \leftrightarrow \varphi)$$

eine n–stellige Operation F und für diese ist $F(\vec{x}) = \{v \mid \varphi\}$ offenbar beweisbar. Also sind Mengenterme im Prinzip nur Namen für die Werte gewisser Operationen auf dem Mengenunversum $\mathcal{V}$.

Von der Erlaubnis der Einführung von Mengentermen macht man meistens nur vorübergehend Gebrauch, etwa in gewissen Beweisen. Ist ein Mengenterm von bleibender Bedeutung, so erteilt man der ihm gleichwertigen Operation sowohl ein neues Symbol als auch einen Namen. So wird sich alsbald herausstellen, daß $\{v \mid \neg\exists x\, x \in v\}$ und $\{v \mid v \subseteq x\}$ Mengenterme sind. Ersteren bezeichnet man mit $\emptyset$ (die *leere Menge*), letzteren mit $\mathfrak{P}$, die *Potenzmengenoperation*. Man wird dabei deutlich unterscheiden müssen zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}x$ einer gegebenen Menge x und dem Operator $x \mapsto \mathfrak{P}x$. Dieser kann selbst keine Funktion im mengentheoretischen Sinne sein wie später herausstellen wird.

Unberührt von diesen Ausführungen sind unsere in 1.4 getroffenen Konventionen über die Benutzung von Klassentermen wie z.B. $\mathcal{V}$ zwecks Mitteilung von Sachverhalten über Mengen. Diese werden wir nicht als formale Objekte der Theorie betrachten, obwohl man auch dieses tun könnte, indem man den Umgang mit ihnen durch gewisse Vereinbarungen strikt regelt. Wir gehen davon aus, daß unsere schrittweise erweiterte Ursprache nur explizit definierte Prädikatsymbole und Operationssymbole enthält. Auch die jeweils erweiterte Sprache bezeichnen wir einfach wieder mit $\mathcal{L}_\in$. Falls erforderlich, sprechen wir von der *Ursprache* $\mathcal{L}_\in$ als derjenigen, welche keine zusätzlich definierten Operations- oder Prädikatensymbole enthält sondern lediglich $=, \in$.

Bemerkung. Unsere Konventionen in **1.4** über den Gebrauch von Klassentermen lassen sich auch in die Theorie verlagern, indem man nur Substitution von Mengentermen erlaubt beschränkt und den noch zu nennenden mengentheoretischen Axiomen die Zusatzaxiome

$$x \in \{v \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi(x) \quad ; \quad x = \{v \mid v \in x\} \quad ; \quad (\varphi \leftrightarrow \varphi') \to \{v \mid \varphi\} = \{v \mid \varphi'\}$$

hinzufügt. Das erste dieser Axiome entspricht unserer Verabredung, $x \in \{v \mid \varphi\}$ als Schreibweise für $\varphi(x)$ zu benutzen. In diesem Zusammenhang stellt sich folgende Frage: Läßt sich entscheiden, ob ein vorgelegter Klassenterm $\{v \mid \varphi\}$ bezüglich einer vorgegebenen Theorie, z.B. ZFC, ein Mengenterm ist, jedenfalls dann, wenn $\{v \mid \varphi\}$ keine Parameter enthält? Leider nein. Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der auch nur für die parameterfreien Klassenterme in den gängigen axiomatischen Mengentheorien entscheidet, ob es sich um einen Mengenterm handelt oder nicht. Feststellungen, daß diese oder jene Klasse sagen wir in ZFC eine Menge ist oder keine Menge sein kann, sind daher in jedem Einzelfalle zu begründen.

Kapitel 2

Die Axiome von Zermelo–Fraenkel

Wir werden nunmehr die Axiome des Systems ZFC (nach Zermelo und Fraenkel) vorstellen und ausführlich diskutieren. Interessant sind nicht nur diese Axiome, sondern vor allem die im Rahmen von $\mathcal{L}_\in$ formulierbaren Folgerungen hieraus, die Sätze oder Theoreme der Mengenlehre. Aussagen, die über ZFC reden, im Rahmen von $\mathcal{L}_\in$ aber nicht formulierbar sind, sind streng genommen keine Aussagen der Mengenlehre; sie haben einen anderen Status. Dazu gehören Aussagen wie z.B. ZFC ist nicht endlich axiomatisierbar.

Die Sätze der Mengenlehre werden aus den Axiomen mit logischen Mitteln hergeleitet. Es würde eine zügige Entwicklung die Theorie nur hemmen, wollten wir auch diese Mittel genau spezifizieren, d.h. formalisieren. Es genügt der Hinweis, daß man dazu in der Lage wäre. Das logische Schließen vollzieht sich im folgenden naiv, wobei wir uns in das jeweils betrachtete Fragment von ZFC hineinversetzen.

Wir verwenden in jedem Falle nur elementare logische Hilfsmittel, wie in der Mathematik erlernt und gewohnt. Oft reden wir über die Theorie oder ihre Sprache $\mathcal{L}_\in$. Dann bewegen wir uns in der *Metatheorie*. Dort werden wir nur unmittelbar einsichtige, sogenannte *finite* Hilfsmittel verwendet.

Die Existenz wenigstens einer Menge wird in manchen Beschreibungen formaler Systeme der Mengenlehre als Extra-Axiom genannt. In $\mathcal{L}_\in$ läßt sich das formulieren als $\exists v\, v = v$. Dies aber ist aus logischen Gründen schon klar, weil die angegebene Formel eine Tautologie ist. Ein anderes Problem ist es, aus der Existenz einer Menge schon auf die Existenz der leeren Menge zu schließen. Das geht nicht mit logischen Mitteln, ist aber eine einfache Folge des in **2.1** diskutierten Aussonderungsaxioms und des Extensionalitätsaxioms.

2.1 Das Aussonderungsaxiom

Das Extensionalitätsaxiom $\mathsf{AE}: \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$ wurde in Kapitel **1** schon ausführlich diskutiert. Der bloßen Schreibweise nach ist AE keine Aussage. Hier ist gemeint, daß AE für alle x, y gilt, d.h. AE meint eigentlich die Aussage

$$\forall xy(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Dabei vereinbaren wir hier ein für allemal: Enthält φ möglicherweise freie Variable Formel und ist von der *Aussage* oder dem *Axiom* φ die Rede, dann ist die Generalisierte von φ gemeint. Eine Formel ist in einer Theorie nämlich dann und nur dann beweisbar, Generalisierte dort beweisbar ist. Anschaulich gesprochen: es ist gleichgültig, ob man zeigt 'Für alle ...' oder aber 'Für beliebiges...'.

Es war eine der entscheidenden Ideen Zermelo's, die uneingeschränkte Mengenbildung zum sogenannten *Aussonderungsprinzip* AS einzuschränken:

AS : Ist a eine Menge, $\mathcal{E}$ eine definite Eigenschaft, dann existiert die Menge aller $x \in a$ mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Ist $\mathcal{E}$ durch φ definiert, läßt AS sich in $\mathcal{L}_\in$ in der Weise $\exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi)$ schreiben, wobei b in φ selbstredend nicht frei vorkommt. Dies ist genau gesagt ein *Aussagenschema*, weil φ eine beliebige Formel sein kann (in der die Variablen x, a nicht einmal notwendig frei vorkommen müssen). φ kann nebst x und a weitere freie Variablen enthalten, sogenannte *Parameter*.

AE sichert die Eindeutigkeit von b, d.h. $\exists! b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi)$ ist beweisbar. In der Tat, $\forall x(x \in b_1 \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi)$, $\forall x(x \in b_2 \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi)$ implizieren $\forall x(x \in b_1 \leftrightarrow x \in b_2)$ und damit $b_1 = b_2$. Gemäß Konvention in **1.4** ist $b = \{x \mid x \in a \wedge \varphi\}$. Man schreibt dafür in der Regel etwas kürzer $b = \{x \in a \mid \varphi\}$.

Bevor wir fortfahren, wollen wir uns überzeugen, daß Russell's Argument nunmehr nicht zu einem Widerspruch, sondern zu einer wichtigen Schlußfolgerung führt. Der Russell'schen Menge entspricht nunmehr die gemäß AS existierende Menge $b = \{x \in a \mid x \notin x\}$, wobei a eine Menge ist, die wir uns im Hinblick auf eine Strategie, der Russell'schen Antinomie so nahe wie möglich zu kommen, als möglichst umfassend denken. Gemäß Definition von b gilt $\forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin x)$, also

$$(*) \quad b \in b \leftrightarrow b \in a \wedge b \notin b.$$

Die Annahme $b \in b$ liefert $b \notin b$ nach $(*)$ und damit einen Widerspruch. Also folgern wir $b \notin b$. Dies und die Annahme $b \in a$ ergeben $b \in b$ nach $(*)$; man entgeht einem

Widerspruch jedoch dadurch, daß die Annahme $b \in a$ fallengelassen wird, also der Schluß $b \notin a$ gezogen wird. Kurz gesagt, $(*)$ impliziert $b \notin a$ und daher $\exists x x \notin a$. Damit wurde gezeigt, als daß jede noch so große Menge a wenigstens eine Menge nicht als Element enthält. Mit anderen Worten, die Allklasse $\mathcal{V}$ ist keine Menge.

Es erhebt sich die Frage, ob nicht das Aussonderungsprinzip eine eventuell unnötige Einschränkung der Mengenbildung darstellt. Wie kommt man nach diesem Prinzip überhaupt zu neuen Mengen, über Teilmengen schon vorhandener Mengen hinaus?

Dafür müssen jeweils gesonderte Existenzprinzipien angegeben werden. Hierbei läßt man sich von Gesichtspunkten leiten, die teils durch Intuition, im wesentlichen aber von praktischen Erfordernissen diktiert sind. Zwar handelt es sich nur um wenige Prinzipien; aber diese liefern insgesamt eine mehr als ausreichende Fülle von Mengen.

Die leere Menge erhält man wie folgt: Nach AS gilt $(*)$ $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin a)$. Nun liefert $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin a)$ offenbar $\forall x x \notin y$ und $(*)$ damit $\exists y \forall x x \notin y$. AE ergibt darüberhinaus $\exists ! y \forall x x \notin y$. Also ist die Einführung des Konstantensymbols $\emptyset$ durch $y = \emptyset \leftrightarrow \forall x x \notin y$ eine legitime explizite Definition. Mehr läßt sich nachweislich noch nicht erhalten. Denn es ist leicht zu sehen, daß AE und AS in einem Modell erfüllt sind, das einzig aus der leeren Menge besteht. In diesem wäre $\mathcal{V} = \{\emptyset\}$ das „Universum" und damit keine Menge im Sinne des Modells. Das verdeutlicht, wie schwach Extensionalität und Aussonderung für sich genommen sind.

Warum beschränkt man sich bei der Aussonderung aus einer gegebenen Menge auf definite Eigenschaften? Warum erlaubt man sich die Aussonderung nach irgendwelchen sinnvoll definierten Eigenschaften? Zwar reicht die definite Aussonderung für alle praktischen Zwecke, aber der tiefere Grund ist, daß schrankenlose Aussonderung erneut zu Widersprüchen führen würde, wie folgendes Beispiel zeigt.

Man betrachte in der Theorie die Menge ω der natürlichen Zahlen, die wir wenig später definieren werden. Hier ist nur wesentlich, daß jedes nichtleere $a \subseteq \omega$ ein kleinstes Element, μa, besitzt. Dabei ist zu beachten, daß $\mu\emptyset$ nicht erklärt ist. Falls $\mu a < n$ für alle $n \in b \subseteq \omega$, so ist auch $\mu a < \mu b$, vorausgesetzt, $b \neq \emptyset$. Man erweitere nun die Aussonderung dahingehend, daß aus einer Menge, insbesondere ω, jede durch einen sinnvollen Ausdruck der deutschen Sprache definierte Menge ausgesondert werden darf. Insbesondere gilt das für ω. Die durch einen sprachlichen Ausdruck H in ω ausgesonderte Menge sei mit $\hat{H}$ bezeichnet. Man betrachte jetzt den folgenden die freie Variable n enthaltenden sprachlichen Ausdruck, den wir mit G bezeichnen:

'n ist größer als $\mu\hat{H}$ für alle sprachlichen Ausdrücke H der Länge kleiner 100'

Dabei sei die Länge des sprachlichen Ausdrucks H die Länge der Buchstabenfolge seiner Niederschrift, Ziffern und Wortzwischenräume mitgezählt. Nach Definition von G ist offenbar $\mu\hat{H} < \mu\hat{G}$ für alle Ausdrücke H einer Länge < 100. Nun ist G selbst ein sinnvoller Ausdruck einer Länge < 100, wovon man sich durch Abzählung leicht überzeugt. Also erhalten wir den Widerspruch $\mu\hat{H} < \mu\hat{H}$.

Dieses Beispiel verdeutlicht, daß die Ausdrucksmittel zur Mengenbildung klar abgegrenzt werden müssen. Ein Durchdenken der obigen Konstruktion enthüllt ihre Verwandtschaft mit der Russellschen Antinomie: Die Definition nimmt Bezug auch auf ein Objekt, das zu definieren man gerade angetreten ist. Hier berührt man die auch philosophisch interessante Problematik der Selbstreferenz, auf die wir im Rahmen dieser Darstellung aber nicht näher eingehen können.

AS sichert, daß die Durchschnittsklasse $a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$ eine Menge ist. Offenbar ist $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$. Allgemein erweist sich die in Kapitel 1 definierte Klasse $\bigcap\mathcal{C}$ für eine beliebige nichtleere Klasse $\mathcal{C}$ als Menge. $\bigcap\mathcal{C}$ kann für beliebiges $a \in \mathcal{C}$ in a ausgesondert werden, denn man sieht leicht $\bigcap\mathcal{C} = \{x \in a \mid (\forall b \in \mathcal{C}) x \in b\}$.

Warnung: Der Term $\bigcap\mathcal{C}$ ist im Formalismus von $\mathcal{L}_\in$ nur dann der Name einer wohlbestimmten Menge, wenn vorher $\exists x\, x \in \mathcal{C}$ bewiesen wurde. Andernfalls ist $\bigcap\mathcal{C}$ der formalen Definition gemäß mit der Allklasse $\mathcal{V}$ identisch. Dem kann auch durch eine Konvention wie z.B. $\bigcap\emptyset := \emptyset$ nicht abgeholfen werden, ebensowenig wie z.B. durch die Konvention $\frac{1}{0} = 0$ das lästige Problem des Dividierens durch Null nicht aus der Welt zu schaffen ist.

Übungen

1. Man zeige, die Klasse $\mathcal{T}r$ der transitiven Mengen ist durchschnittsabgeschlossen, d.h. für beliebige nichtleere Mengen $a \subseteq \mathcal{T}r$ ist $\bigcap a \in \mathcal{T}r$.

2. Sei $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} := \{x \mid x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$. Man beweise die Äquivalenz von
$$\text{(i) } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \quad \text{(ii) } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}, \quad \text{(iii) } \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}, \quad \text{(iv) } \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \emptyset.$$

3. Eine Klasse $\mathcal{U}$ heiße $\in$*-induktiv*, wenn $\forall a(a \subseteq \mathcal{U} \to a \in \mathcal{U})$, d.h. wenn mit allen Elementen einer Menge a auch a selbst zu $\mathcal{U}$ gehört. Zeige $\mathcal{R}$ ist $\in$-induktiv.

4. Beweise keine $\in$-induktive Klasse ist Menge.

   Hinweis. Wäre a $\in$-induktive Menge, so nach AS auch $\mathcal{R} \cap a$.

2.2 Das Paarmengenaxiom

Dieses Axiom werden wir später aus dem Ersetzungsaxiom herleiten. Es ist daher eigentlich überflüssig und wird hier nur aus methodischen Gründen diskutiert. Es lautet

$$\mathsf{AO}: \quad \text{Die Paarklasse } \{a, b\} \text{ ist eine Menge.}$$

Konventionsgemäß bedeutet dies $\exists p\, p = \{a, b\}$ oder $\exists p \forall x(x \in p \leftrightarrow x \in \{a, b\})$, d.h. $\exists p \forall x(x \in p \leftrightarrow x = a \vee x = b)$. Offenbar ist $\exists! p\, p = \{a, b\}$ beweisbar, was die Einführung des Terms $\{a, b\}$ in $\mathcal{L}_\in$ ermöglicht. Natürlich kann man diesen Term aus den Formeln jederzeit wieder entfernen, wenn dies gewünscht wird.

$\{a, a\}$ ist identisch mit der Singleton-Klasse $\{a\}$, denn $x \in \{a, a\} \leftrightarrow x = a$ für alle x ist beweisbar. Also ist auch $\{a\}$ eine Menge. Würde man nur dies fordern, könnte man den Mengencharakter von $\{a, b\}$ nicht beweisen (Übung 4).

Mit AO erhalten wir bereits eine unendliche Vielfalt paarweise verschiedener, jedoch höchstens zweielementiger Mengen: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, usw. Wir könnten an dieser Stelle bereits die Begriffe der Relation und Funktion einführen und diskutieren, beschränken uns aber zunächst auf einen hierfür wichtigen Hilfsbegriff, den des geordneten Paares (nach Kuratowski).

Definition. Das *geordnete Paar* (a, b) aus den Mengen a, b sei $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Eigentlich kommt es bei der Definition von (a, b) nur darauf an, daß der folgende Satz gilt; jede andere Definition, welche ihn liefert, wäre ebensogut (Übung).

Satz 2.1. $(a, b) = (a', b') \rightarrow a = a' \wedge b = b'$.

Beweis. Im Falle $a = b$ ist $(a, b) = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Folglich muß auch (a', b') Einermenge sein, d.h. $\{a'\} = \{a', b'\}$, was $a' = b'$ und somit $(a', b') = \{\{a'\}\}$ impliziert. $\{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$ ergibt nun $\{a\} = \{a'\}$ und damit $a = a'$. Daher gilt auch $b = a = a' = b'$. Sei nun $a \neq b$. Dann ist $\{a, b\} \in (a', b')$, also kann nur $\{a, b\} = \{a', b'\}$ sein, weil $\{a'\}$ Einermenge ist. Weil $\{a\} \in (a', b')$, verbleibt nur $\{a\} = \{a'\}$, was $a = a'$ impliziert. Wegen $b \in \{a', b'\}$ folgt dann aber $b = b'$, weil $b \neq a = a'$. ❑

Satz 2.1 hat als unmittelbare Folgerung, daß $(a, b) = (b, a)$ nur im Falle $a = b$ gültig ist, während aus logischen Gründen $\{a, b\} = \{b, a\}$ für alle a, b.

Das *geordnete Tripel* (a, b, c) von Mengen a, b, c sei $(a, b, c) = ((a, b), c)$. Allgemein wird aus einer Definition des geordneten n-tupels $(a_1, \ldots, a_n)$ diejenige des geordneten $(n + 1)$-tupels gemäß folgendem Definitionsschema gewonnen:

Definition. $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) = ((a_0, \ldots, a_n), a_{n+1})$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Durch Induktion über n, beginnend mit $n = 1$, beweist man leicht

Korollar 2.2. $(a_0, \ldots, a_n) = (a'_0, \ldots, a'_n) \to a_0 = a'_0 \wedge \ldots \wedge a_n = a'_n$.

Bemerkung. Hier handelt es sich um eine *Metainduktion* oder *Induktion in der Metatheorie*. Später werdern wir auch mit Induktionen *in* ZFC zu tun haben, z.B. Induktionen über Ordinalzahlen. Deswegen diese Unterscheidung. Sei φ_n z.B. Aussage des Korollars für gegebenes n. Bei der Metainduktion konstruieren wir aus einem gegebenen Beweis für φ_n einen solchen für φ_{n+1}. Ausgehend von dem Beweis für φ_1 erhalten wir einen Beweis für φ_2, daraus einen solchen für φ_3, usw. Daß somit φ_n für jedes konkrete n bewiesen ist, leuchtet unmittelbar ein. Diese Schlußweise spielt sich auf einer unserer Mengentheorie übergeordneten Ebene ab, in welcher die natürlichen Zahlen $0, 1, \ldots$ naiv benutzt werden. Metainduktion über n gehört ebenso wie z.B. die Formelinduktion zu den finiten Beweismitteln unserer Metatheorie. Ein gutes Beispiel ist auch der Nachweis von $n + 1 = \{0, 1, \ldots n\}$ im nächsten Abschnitt. Es ist ein Irrglaube anzunehmen, man könne vollständige Induktion mengentheoretisch „begründen“. Man kann sie in der Mengenlehre zwar beweisen, benötigt dafür aber viel stärkere Hilfsmittel.

Übungen

1. Man zeige, daß die Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ paarweise voneinander verschieden sind.

2. Man erkläre $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$ und $(a, b) := \{\{a, 0\}\{b, 1\}\}$. Zeige, daß auch diese Definition eines geordneten Paares sinnvoll ist, also Satz 2.1 beweisbar ist.

3. Man zeige unter der Voraussetzung, daß es keine Mengen a, b mit $a \in b \in a$ gibt: Die einzigen höchstens 2-elementigen transitiven Mengen sind $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

4. Für Klassen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sei $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{p \mid (\exists x \in \mathcal{A})(\exists y \in \mathcal{B}) p = (x, y)\}$. Man zeige: $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \times \mathcal{C}$.

5. Man ersetze AO durch die Forderung AO′ der Existenz von $\{a\}$ für jede Menge a. Zeige, AE , AS und AO′ lassen sich in einem Universum $\mathcal{V}$ erfüllen, das nur aus den Einermengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}, \ldots$ besteht.

2.3 Das Vereinigungsaxiom – Natürliche Zahlen

Während der Durchschnitt $a \cap b$ von Mengen a, b unmittelbar durch Aussonderung zu erhalten ist, läßt sich aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen, daß die Klasse $a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$ Menge ist. Man fordert nun sogleich etwas mehr, nämlich die Existenz der Vereinigung aller Mengen einer beliebigen Menge, wobei diese der besseren Veranschaulichung halber oft ein Mengensystem nennt.

AU : Für jedes Mengensystem a ist $\bigcup a$ eine Menge.

Das bedeutet $\exists u\, u = \bigcup a$, oder ganz formal $\exists u(\forall x(x \in u \leftrightarrow (\exists y \in a) x \in y)$. Man könnte AU durch die schwächere Forderung der Existenz einer gemeinsamen Obermenge für alle $a \in s$ ersetzen, denn man erhielte $\bigcup s$ aus einer solchen Menge sofort durch Aussonderung.

Anders als $\bigcap s$ bezeichnet $\bigcup s$ stets eine wohlbestimmte Menge; insbesondere gelten $\bigcup \emptyset = \emptyset$ und $\bigcup \{a\} = a$. Man beachte, AU garantiert unter Beachtung von AO auch den Mengencharakter von $a \cup b$, weil doch $a \cup b = \bigcup \{a, b\}$. Ferner können wir jetzt die aus den Elementen a, b, c bestehende Menge $\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}$ bilden und allgemein $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ durch $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$ erklären.

Bemerkung. Dieses Definitionsschema ist ebenso wie die Definition von $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Beispiel einer *Definition durch Metarekursion* über $\mathbb{N}$. Metarekursionen gehören zu den sogenannten finiten Konstruktionsmitteln und bedürfen keiner Rechtfertigung. Hingegen werden wir bei der Modellierung der Metarekursion in der Theorie durch den Rekursionssatz für ω in **5.1** vor ein völlig neuartiges Problem gestellt.

AU hat unter anderem zur Folge, daß die Klasse $\mathcal{V}^{(1)}$ aller Einermengen eine echte Klasse , d.h. keine Menge ist. Denn wäre dies der Fall, wäre auch $\bigcup \mathcal{V}^{(1)}$ und damit ganz $\mathcal{V}$ eine Menge, weil doch $a \in \{a\}$ für jede Menge a. Damit kann auch die Klasse $\mathcal{V}^{(2)}$ aller Zweiermengen keine Menge sein, sonst könnte $\mathcal{V}^{(1)}$ aus der umfassenderen Klasse $\mathcal{V}^{(2)}$ leicht ausgesondert werden. Ebenso ist die Klasse aller Dreiermengen ist keine Menge und so fort. Es besteht also keine Hoffnung, $1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach als Menge aller Einermengen, Zweiermengen, usw. zu definieren. Glücklicherweise gibt es hier aber einen eleganten Ausweg.

Der ursprüngliche Vorschlag Zermelo's, die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ der Reihe nach mit den Mengen $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ zu identifizieren, wurde zugunsten einer weittragenden Idee Von Neumann's (1923) aufgegeben, diese der Reihe nach durch die Mengen

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

zu definieren, so daß $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$. Das induktive Definitionsschema lautet

$$0=\emptyset \quad ; \quad n+1=n\cup\{n\}.$$

Man zeigt dann $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$ leicht durch Metainduktion über n. Es ist bequem, $\mathbb{N}$ mit der Gesamtheit der Von Neumann'schen natürlichen Zahlen zu identifizieren, so daß stets $n\in n+1$ und $n\subseteq n+1$. In den Übungen analysieren wir diese Zahlen noch etwas genauer. Jede von ihnen ist insbesondere eine transitive Menge. Denn $0=\emptyset$ ist transitiv und mit n auch $n+1=n\cup\{n\}$, weil allgemein mit einer Menge a auch $a\cup\{a\}$ transitiv ist: Für $x\in a\cup\{a\}$ ist im Falle $x\in a$ sicher $x\subseteq a\subseteq a\cup\{a\}$ und das gilt für $x=a$. Nennt man eine Menge a *erblich transitiv*, wenn nebst a auch jedes Element von a transitiv ist, so beweist man auch dies mühelos für jedes $n\in\mathbb{N}$. Durch diese Eigenschaft definieren wir später die Ordinalzahlen. Die $\in$-Relation von $\mathbb{N}$ stimmt auch mit der echten Inklusion überein (Übung 6) und erweist sich unschwer als identisch mit der üblichen $<$-Relation auf $\mathbb{N}$.

Übungen

1. Beweise $a\in\mathcal{T}r$ oder $a\subseteq\mathcal{T}r$ impliziert $\bigcup a\in\mathcal{T}r$.

2. Man zeige, mit a sind auch jedes $x\in a$, sowie $a\cup\{a\}$ und $\bigcup a$ erblich transitiv.

3. Beweise: Sind alle $x\in a$ erblich transitiv, so auch $\bigcup a$ und für $a\neq\emptyset$ auch $\bigcap a$.

4. In den folgenden Übungen bezeichnen n,m Zahlen im Von Neumannschen Sinne. Man zeige induktiv über n

   (1) $n\notin n$, (2) $n+1=m+1\rightarrow m=n$, (3) $m\in n\rightarrow m+1\in n\vee m+1=n$.

5. Eine Menge a heiße $\in$-*geordnet*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

   (a) $(\forall xyz\in a)(x\in y\in z\rightarrow x\in z)$ (Transitivität),
   (b) $(\forall x\in a)x\notin x$, (Irreflexivität),
   (c) $(\forall xy\in a)(x\in y\vee x=y\vee y\in x)$ (Konnexität).

   Zeige, jedes n ist $\in$-geordnet.

6. Beweise $m\in n\leftrightarrow m\subset n$ unter Beachtung von Übung 4.

2.4 Das Potenzmengenaxiom

$\mathfrak{P}(a) = \{v \mid v \subseteq a\}$ ist die Klasse aller Teilmengen von a. Das Potenzmengenaxiom fordert, daß diese eine Menge sei.

AP : Für jede Menge a ist $\mathfrak{P}(a)$ eine Menge.

Die nackte Niederschrift von AP in $\mathcal{L}_\in$ lautet: $\forall a \exists p \, \forall x \{x \in p \leftrightarrow x \subseteq a\}$. Aufgrund des Aussonderungsaxioms ist klar, daß AP äquivalent ist mit der Forderung, daß zu jeder Menge a irgendeine Menge existiert, welche alle Teilmengen von a als Elemente enthält. Offensichtlich ist immer $\emptyset, a \in \mathfrak{P}(a)$.

Ist a eine Menge und $\mathcal{E}$ durch φ definiert, läßt sich nach AP die Menge $\{u \in \mathfrak{P}(a) \mid \varphi\}$ aller Teilmengen a mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ bilden; man bezeichnet diese aus suggestiven Gründen meistens mit $\{u \subseteq a \mid \varphi\}$. So ist z.B. $\{u \subseteq a \mid u \neq a\}$ die Menge aller echten Teilmengen von a. Ferner gilt $\{a\} = \{x \subseteq a \mid x = a\}$. Daher sichert AP auch ohne AO die Existenz solcher Mengen wie $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$.

Ist $\mathcal{E}$ eine durch φ definierte Eigenschaft von Mengen und a vorgegeben, betrachtet man oft den Durchschnitt aller Teilmengen von a mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$, also

$$\bigcap\{x \subseteq a \mid \varphi\} = \{z \in a \mid (\forall u \subseteq a)(\varphi(u) \rightarrow z \in u)\}.$$

Der rechte Term dieser Gleichung zeigt, daß diese Mengenbildung das Axiom AP hier nur scheinbar bemüht.

In der mathematischen Praxis betrachtet man häufig die Gesamtheit aller Mengen $a \cup x$ (bzw. $a \cap x$), wo a vorgegeben und x alle Mengen eines vorgegebenen Mengensystems s durchläuft. Es handelt sich hier um die Klasse $\mathcal{C} = \{y \mid (\exists x \in s) y = a \cup x\}$, die gelegentlich auch mit $\{a \cup x \mid x \in s\}$ bezeichnet wird. [1)] AP sichert den Mengencharakter von $\mathcal{C}$ deswegen, weil z.B. $a \cup x \subseteq a \cup \bigcup s$ für alle $x \in s$.

Allgemein läßt sich mit den bisherigen Axiomen folgendes beweisen: Ist τ ein beliebiger aus Variablen und den Operationssymbolen $\cap, \cup, \mathfrak{P}, \{, \}, (,)$ aufgebauter Term und sind $s_1, \ldots, s_n$ Mengen, so auch die Klasse

$$\{\tau \mid x_1 \in a_1, \ldots, x_n \in a_n\} := \{y \mid (\exists x_1 \in a_1) \ldots (\exists x_n \in a_n) \, y = \tau\}.$$

So entpuppt sich z.B. $\{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$, das mit $a \times b$ bezeichnete *Kreuzprodukt*

[1)] Bei Verwendung dieser und ähnlicher Schreibweisen muß klar verabredet sein, welche Variable durch den Klassenterm gebunden und welche die Rolle von Parametern spielt. Im Beispiel sind a und s Parameter und die Variable x ist gebunden.

von a, b, wie folgt als Menge. Da $\{x\}, \{x, y\} \in \mathfrak{P}(a \cup b)$ für $x, y \in a \cup b$, ist

$$(\forall x \in a)(\forall y \in b)((x, y) \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b))$$

beweisbar. Daher ist $a \times b = \{p \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b) \mid (\exists x \in a)(\exists y \in b)p = (x, y)\}$. Hier handelt es sich demnach um eine Aussonderung in $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$. Bei komplizierteren Termen τ kann es mühsam sein, eine Menge explizit anzugeben, aus der ausgesondert wird. Das ist oft aber gar nicht erforderlich. Das im nächsten Abschnitt vorgestellte Ersetzungsaxiom macht nämlich viele Aussonderungen überflüssig und garantiert den Mengencharakter z.B. von $\{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ auch ohne Rückgriff auf das Potenzmengenaxiom.

Übungen

1. Man zeige $\mathfrak{P}(a \cup \{e\}) = \mathfrak{P}(a) \cup \{u \cup \{e\} \mid u \subseteq a\}$.
2. Beweise, $\{\mathfrak{P}(x) \mid x \in a\}$ ist Menge.

   Hinweis. $\mathfrak{P}(x) \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup a)$ für jedes $x \in a$.
3. Man zeige $\{x \cup y \mid x \in a, y \in b\}$ ist Menge. Analoges gilt für $\cap, \setminus, \{,\}, \ldots$

   Hinweis. Betrachte $\{z \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b) \mid (\exists x \in a)(\exists y \in b)z = (x, y)\}$.
4. Man zeige, $a \in \mathcal{T}r$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}(a) \in \mathcal{T}r$.
5. a habe eine transitive Obermenge. Zeige, es gibt eine kleinste transitive Obermenge a^{tc} (die *transitive Hülle* von a), also $a^{tc} \subseteq b$ für jedes transitive $b \supseteq a$, und zwar ist dies $\bigcap\{v \mid v \supseteq a \wedge v \in \mathcal{T}r\}$ [2)].
6. Beweise $a \cap \bigcup s = \bigcup\{a \cap x \mid x \in s\}$, $\bigcup s \cap \bigcup t = \bigcup\{x \cap y \mid x \in s, y \in t\}$.
7. Man zeige, $\bigcup \mathcal{A} \times \bigcup \mathcal{B} = \bigcup\{a \times b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$.
8. Man beweise mit Hilfe von AP : Mit $\bigcup \mathcal{A}$ ist auch $\mathcal{A}$ eine Menge.

[2)] Die Existenz einer transitiven Obermenge für jede Menge und damit der transitiven Hülle folgt erst aus dem Ersetzungaxiom im nächsten Abschnitt.

2.5 Das Ersetzungsaxiom

Dieses von Fraenkel den Axiomen von Zermelo hinzugefügte Axiom besagt grob, daß das Bild einer Menge unter einem Operator wieder eine Menge ist. Dabei verstehen wir hier unter einem *Operator* eine durch eine $\mathcal{L}_\in$-Formel $\varphi = \varphi(x,y)$ mit mindestens den freien Variablen x, y definierte Vorschrift F, welche jeder Menge x des Universums $\mathcal{V}$ eindeutig eine Menge y zuordnet. Präziser heißt dies, daß die Aussage $\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ beweisbar ist und $F(x)$ dasjenige Objekt y ist, für welches $\varphi(x,y)$ zutrifft. φ kann weitere freie Variable enthalten, die dann *Parameter* heißen. F hängt dann auch von diesen Parametern ab.

Operatoren dienen wie Klassen dem besseren Verständnis der komplizierten deduktiven Struktur der Mengenlehre. Man kann einen Operator F als Klasse der geordneten Paare (x,y) mit $F(x) = y$ verstehen wenn dies gewollt ist, oder aber mit seiner definierenden Formel einfach identifizieren.

Beispiel. $\mathfrak{P} : x \mapsto \mathfrak{P}(x)$ [3)] ist ein durch $\varphi(x,y) := \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ definierter Operator. Nach AP und AE ist $\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ nämlich gesichert.

Allgemeiner kann eine n-stellige Operation F auf auf $\mathcal{V}$ ($n \geqslant 0$) durch explizite Definition vermittels $y = F(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x},y)$ eingeführt werden, wenn nur $\forall \vec{x} \exists! y \varphi(\vec{x},y)$ beweisbar ist. Dabei steht $\vec{x}$ für $x_1, \ldots, x_n$ und $\forall \vec{x}$ für $\forall x_1, \ldots, \forall x_n$.

Ist a eine Menge und F ein durch $\varphi(x,y)$ definierter Operator, so heiße die Klasse $\{F(x) \mid x \in a\} := \{y \mid (\exists x \in a)\varphi\}$ das *Bild von a unter F*. Es entspricht der Anschauung, daß für einen vorgegebenen Operator F mit a auch $\{F(x) \mid x \in a\}$ eine Menge ist. Kurz, $\exists b\, b = \{y \mid (\exists x \in a)\varphi\}$, d.h. $\exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow (\exists x \in a)\varphi)$ sollte aus $\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ beweisbar sein. Das wird gesichert durch das sogenannte *Ersetzungsaxiom*

$$\mathsf{AR}: \quad \forall x \exists! y \varphi(x,y) \to \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow (\exists x \in a)\varphi(x,y)).$$

Wie bei AS handelt es sich hier um ein Axiomenschema. φ enthält b nicht frei, aber nebst x, y i.a. noch andere freie Variable (Parameter). Ist $\forall x \exists! y \varphi$ beweisbar und F der durch φ definierte Operator, so besagt AR gerade, daß das Bild b einer beliebigen Menge a unter F wieder eine Menge ist. Dies ist mit bisherigen und den noch zu nennenden Axiomen unbeweisbar wie 1923 von Fraenkel und etwas früher schon von Skolem bemerkt wurde.

[3)] Wir verwenden hier eine wohlbekannte und sich selbst erklärende Schreibweise. Dieselbe benutzt man auch für Funktionen, siehe 3.1.

In mathematischen Anwendungen ist F meist durch einen (geschachtelten) Term in $\cup, \cap, \{,\}, \ldots$ darstellbar. In diesen Fällen ist der Mengencharakter $\{F(x) \mid x \in a\}$ oft schon durch die früheren Axiome gesichert, wie z.B. von $\{\mathfrak{P}(x) \mid x \in a\}$.

Beispiel einer Anwendung, in der AR benötigt wird, ist der Existenzbeweis einer transitiven Obermenge für jede Menge a (Übung 3) und damit der transitiven Hülle a^{tc}. Hier kann ein Term wie oben nur beschwerlich konstruiert werden.

AR ist ein sehr starkes Axiom. Es macht z.B. das Axiom AO und sogar das Aussonderungsaxiom überflüssig. Wir wollen dies am Beweis von AO verdeutlichen.

Seien a, b gegeben. Offenbar ist die Klasse $\{a, b\}$ gerade die Werteklasse des Operators $F_{a,b}$, definiert durch $\varphi(x, y) := (x = \emptyset \to y = a) \wedge (x \neq \emptyset \to y = b)$. Also

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} a \text{ für } x = \emptyset, \\ b \text{ für } x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Hier sind a, b Parameter. Es ist plausibel, daß $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ ohne Benutzung von AO beweisbar ist. Um mit AR zu schließen, daß $\{a, b\}$ Menge ist, genügt es eine Menge c mit $\{F_{a,b}(x) \mid x \in c\} = \{a, b\}$ anzugeben. Dazu betrachte man die uns durch AP garantierte Menge $c := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $(= \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$. Diese leistet das Verlangte, einfach weil $F_{a,b}(\emptyset) = a$ und $F_{a,b}(\{\emptyset\}) = b$.

Sei $\forall x \exists^{\leqslant 1} y \varphi(x, y)$ beweisbar. Dann definiert φ einen *partiellen* Operator F, der für $x \in \mathcal{V}$ nur erklärt ist, falls $\exists y\, \varphi(x, y)$ und dort den Wert y hat. So ist z.B. $x \mapsto \bigcap x$ nur für $x \neq \emptyset$ erklärt und in diesem Sinne ein partieller Operator. Man spricht von diesem auch als einem auf der Klasse aller nichtleeren Mengen definierten Operator oder einer *Abbildung* und verwendet analoge Redeweisen für andere partielle Operatoren. Ein solcher kann immer auch als ein überall definierter Operator angesehen werden, indem man ihn für eigentlich unerwünschte Argumente irgendwie definiert. Daher wird AR oft etwas schärfer formuliert als

$$\mathsf{AR}': \quad \forall x \exists^{\leqslant 1} y \varphi(x, y) \to \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow (\exists x \in a) \varphi(x, y)).$$

Dies ist aber nur eine scheinbare Verschärfung von AR und leicht herleitbar, Übung 2.

Ist F eine durch $\varphi(\vec{x}, y)$ erklärte n-stellige Operation, $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{V}$, so sei

$$\{F(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in a_1, \ldots, x_n \in a_n\} = \{y \mid (\exists x_1 \in a_1) \ldots (\exists x_n \in a_n) \varphi(\vec{x}, y)\}.$$

AR sichert, daß auch dies eine Menge ist. Speziell ist $\{F(x, y) \mid x, y \in a\}$ eine Menge. Dazu muß man keineswegs auf geordnete Paare zurückgreifen. Wir erwähnen dies, weil viele anscheinend auf AP beruhende Mengenbildungen auch durch AR garantiert werden. So existiert z.B. die Kreuzmenge $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ auch wegen AR, obwohl man sie wie in **2.4** auch aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$ aussondern könnte.

Ein Operator auf dem Universum ist eigentlich ein Spezialfall eines (zweistelligen) *Prädikats* $\mathcal{P}(x, y)$, worunter eine durch eine $\mathcal{L}_\in$-Formel $\varphi = \varphi(x, y)$ definierte Beziehung zwischen Mengen x, y verstanden sei. So sind das $\in$-Prädikat und das Inklusionsprädikat $\subseteq$ definiert durch die Formeln $x \in y$ bzw. $\forall z(z \in x \to z \in y)$. In einigen Fällen ist $\{y \mid \varphi(x, y)\}$ für jedes x eine Menge, etwa für das durch $y \subseteq x$ definierte Prädikat. Dann sagt man, es gibt *höchstens mengenviele* y mit $\mathcal{P}(x, y)$. Unter Beachtung von AU erweist sich dann auch folgendes Schema als gleichwertig zu AR:

$$\mathsf{AR}'' \quad (\forall x \in a)\exists u \forall y(\varphi(x, y) \to y \in u) \to \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x \varphi(x, y)).$$

In Worten: Ist a Menge und $\mathcal{P}(x, y)$ ein Prädikat, so daß $b_x = \{y \mid \mathcal{P}(x, y)\}$ für jedes $x \in a$ Menge ist, so existiert die Vereinigung aller Mengen b_x für $x \in a$.

In manchen Zusammenhängen ist es vorteilhaft, statt AR das folgende wesentlich schärfere Axiom zu fordern, das *Kollektionsschema*:

$$\mathsf{Acol}: \quad (\forall x \in a)\exists y \varphi(x, y) \to \exists b(\forall x \in a)(\exists y \in b)\varphi(x, y).$$

Acol impliziert leicht AR' und damit AR; denn im Falle $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ ist $\{y \mid \varphi(x, y)\}$ für jedes $x \in a$ eine Einermenge, und eine Menge b in Acol liefert gerade das Bild von a des durch $\varphi(x, y)$ definierten Operators. Ein Beweis von Acol benutzt nebst AF auch das erst später vorgestellte Fundierungsaxiom, Übung 2 in **5.4**.

Übungen

1. Sei F eine 2-stellige Operation. Man zeige, $\{F(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ ist Menge.

   Hinweis. Zeige zuerst $\{F(x, y) \mid x \in a, y \in b\} = \bigcup_{y \in b}\{F(x, y) \mid x \in a\}$. Nach AR ist $\{F(x, y) \mid x \in a\}$ für festes y (als Parameter) eine Menge, daher nach demselben Axiom auch $\bigcup_{y \in b}\{F(x, y) \mid x \in a\}$.

2. Man zeige, AR' und auch AR'' sind zu AR äquivalent.

   Hinweis. $\forall x \exists^{\leqslant 1} y \varphi(x, y)$ liefert für $\varphi'(x, y) := \varphi(x, y) \vee \neg\exists x \varphi(x, y) \wedge y = \emptyset$ leicht $\forall x \exists! y \varphi'(x, y)$.

3. Man beweise in naiver Weise die Existenz einer transitiven Obermenge für eine Menge a. Später wird dies auch in der Theorie bewiesen.

   Hinweis. Sei $a_0 = a$ und $a_{i+1} = \bigcup a_i$ für jedes i. Dann ist $a^* := \bigcup\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ transitiv. Anschaulich formuliert: $a^* = a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup \ldots$ AR verbirgt sich hier in der Mengen-Eigenschaft von $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, siehe hierzu **5.1**.

2.6 Das Unendlichkeitsaxiom

Die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik resultiert vor allem auf der Erschließung des Transfiniten. Die abstrakten Bereiche mathematischer Untersuchungen sind in der Regel unendlich und die Mathematiker kümmern sich bei ihren Abstraktionen kaum um die Frage, ob unendliche Gesamtheiten in der Realität existieren. Sie existieren jedenfalls in ihren Gedanken.

Bevor wir innerhalb unserer Theorie über unendliche Mengen reden können, muß dieser Begriff erst definiert werden. Es genügt natürlich, den Begriff endliche Menge zu definieren, denn unendliche Mengen sind per definitionem die nicht endlichen.

Eine Menge a ist im naiven Sinne endlich, wenn a durch schrittweises Wegnehmen von Elementen ausgeschöpft wird. Vor jedem Schritt des Entnehmens ist der Haufen h der bereits entfernten Elemente eine gewisse Teilmenge von a, beginnend mit $h = \emptyset$. Im letzten Schritt ist a ausgeschöpft und $h = a$. Dieses Kleinkind-Experiment läßt sich in $\mathcal{L}_\in$ vollständig beschreiben, und zwar durch folgende, von der Kunst des Zählens mit natürlichen Zahlen völlig unabhängige

Definition. a ist *endlich* genau dann, wenn für jedes $s \subseteq \mathfrak{P}(a)$ mit $\emptyset \in s$

$$(*)(\forall h \in s \setminus \{a\})(\exists x \in a \setminus h) h \cup \{x\} \in s) \to a \in s.$$

In Worten: a ist endlich genau dann, wenn a zu jedem System s von Teilmengen von a gehört, welches $\emptyset$ enthält und mit jeder echten Teilmenge h von a auch $h \cup \{x\}$ für mindestens ein $x \in a \setminus h$.

Beispiele endlicher Mengen sind $\emptyset$, jede Einermenge, jede Zweiermenge, usw. Siehe hierzu Lemma 6.2. Es gibt unzählige andere Definitionen des Begriffs einer endlichen Menge. Man muß diese nicht parat haben; wichtig ist im Grunde nur der folgende Satz. Darin bezeichne $\mathcal{F}in$ die Klasse aller endlichen Mengen. Nur in diesem Satz und in Lemma 6.2 wird auf obige Definition Bezug genommen.

Satz 6.1 (Induktionssatz für endliche Mengen). *Sei $\mathcal{U}$ eine Klasse mit mit den Eigenschaften*

$$\text{(a) } \emptyset \in \mathcal{U}, \quad \text{(b) } \forall x \forall y (x \in \mathcal{U} \to x \cup \{y\} \in \mathcal{U}).$$

Dann gehören alle endlichen Mengen zu $\mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{F}in \subseteq \mathcal{U}$.

Beweis. Sei $a \in \mathcal{F}in$ und $s = \{x \subseteq a \mid x \in \mathcal{U}\}$. Nach (a) ist $\emptyset \in s$. (b) impliziert gewiß die Prämisse von $(*)$. Demnach also $a \in s$, d.h. $a \in \mathcal{U}$. ❑

$\mathcal{F}in$ selbst hat die Eigenschaften (a) und (b) im Induktionssatz. Das folgt aus

Lemma 6.2. *$a \in \mathcal{F}in \to a \cup \{e\} \in \mathcal{F}in$ für jedes $e \notin a$.*

Beweis. $s \subseteq \mathfrak{P}(a \cup \{e\})$ erfülle die Prämisse von $(*)$. $s' := \{h \setminus \{e\} \mid h \in s\}$ hat dann die Eigenschaft $(\forall h \in s' \setminus \{a\})(\exists x \in a \setminus h) h \cup \{x\} \in s')$ wie man unschwer verifiziert. Also $a \in s'$, denn $a \in \mathcal{F}in$. Daher ist notwendig $a \cup \{e\} \in h$. Folglich $a \cup \{e\} \in \mathcal{F}in$. ❏

Satz 6.1 ergibt unter Beachtung von Lemma 6.2 leicht, daß mit a, b auch $a \cup b$, $a \times b$ und $\mathfrak{P}(a)$ endlich sind. Die Beweise verlaufen nach dem Muster desjenigen von

Satz 6.3. *Mit einer Menge ist auch jede ihrer Teilmengen endlich.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{x \mid (\forall u \subseteq x) u \in \mathcal{F}in\}$. Man überprüft leicht die Bedingungen (a) und (b) in Satz 6.1. Für (b) benötigt man gerade Lemma 6.2. Also $\mathcal{F}in \subseteq \mathcal{U}$, d.h. für jedes $x \in \mathcal{F}in$ gilt $(\forall u \subseteq x) u \in \mathcal{F}in$, was zu zeigen war. ❏

Offenbar liefert obige Definition durch Kontraposition sofort folgende

Satz 6.4 (Charakterisierungsatz unendlicher Mengen). *a ist unendlich genau dann, wenn es ein System s echter Teilmengen von a gibt, welches mit jedem $u \in s$ noch ein $u \cup \{x\} \neq u$ enthält und damit keine maximalen Elemente besitzt.*

Mit a ist auch jede Obermenge $a' \supseteq a$ unendlich. Denn ein Mengensystem echter Teilmengen von a mit den im Charakterisierungssatz angegebenen Eigenschaften leistet für a' dieselben Dienste. Mit den bisherigen Axiome kann die Existenz unendlicher Mengen allerdings nachweislich noch nicht bewiesen werden. Diese ergibt sich vielmehr aus dem traditionell wie folgt formulierten *Unendlichkeitsaxiom*

$$\mathsf{AI}: \quad \exists u (\emptyset \in u \land \forall x (x \in u \to x \cup \{x\} \in u)).$$

Wir schreiben künftig x^{+1} für $x \cup \{x\}$ und nennen eine Menge u mit den Eigenschaften $\emptyset \in u$ und $\forall x (x \in u \to x^{+1} \in u)$ vorübergehend *induktiv*. AI fordert die Existenz einer induktiven Menge. In jeder derartigen Menge liegen alle Von Neumann'schen Zahlen n. Davon überzeugt man sich induktiv über n ohne jede Schwierigkeit. Das reicht jedoch noch nicht hin für die Behauptung, u sei unendlich. Vielmehr muß bewiesen werden, daß jede induktive Menge u im präzisierten Sinne unendlich ist. Bevor wir uns damit auseinandersetzen, wollen wir zunächst die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen in der Theorie modellieren.

Definition. $\omega = \bigcap \{u \mid u \text{ induktiv}\}$ heißt die Menge der natürlichen Zahlen.

Diese Definition ist sinnvoll, weil es wenigstens eine induktive Menge u_0 gibt, aus welcher $\omega = \{z \in u_0 \mid \forall u (u \text{ induktiv} \to z \in u)\}$ ausgesondert werden kann. Aus der Definition folgt fast trivial das klassische Beweisprinzip durch Induktion: *Ist v eine Menge mit $0 \in v$, so daß mit $n \in v$ stets auch $n^{+1} \in v$, so ist $\omega \subseteq v$.*

Diese ist ein Sonderfall des folgenden Satzes. Um diesen bequem zu formulieren, nennen wir eine Klasse $\mathcal{E}$ *induktiv*, falls $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\forall x(x \in \mathcal{E} \to x^{+1} \in \mathcal{E})$. Da $\mathcal{E}$ zugleich eine definite Eigenschaft darstellt, spricht man oft auch von der *induktiven Eigenschaft* $\mathcal{E}$. So ist z.B. die Eigenschaft 'v ist endlich' offenbar induktiv, aber z.B. auch 'v ist transitiv', denn $\emptyset$ ist transitiv und mit v auch v^{+1}, siehe **2.3**.

Satz 6.5 (Induktionssatz für ω). *Ist $\mathcal{E}$ induktiv, so ist $\omega \subseteq \mathcal{E}$.*

Beweis. ω ist der Durchschnitt aller induktiven Mengen und offenbar selbst induktiv. Daher ist auch $u := \omega \cap \mathcal{E}$ induktiv, also $\omega \subseteq u$. Weil $u \subseteq \mathcal{E}$, folgt $\omega \subseteq \mathcal{E}$. ❑

Man verdeutliche sich, daß dieser Satz eigentlich ein Aussagenschema in $\mathcal{L}_\in$ darstellt. Mit $\mathcal{E} = \{v \mid \varphi(v)\}$ lautet er $\varphi(\emptyset) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x^{+1})) \to (\forall z \in \omega)\varphi(z)$. Weil z.B. die Eigenschaft '$x \notin x$' induktiv ist, liefert Satz 6.5 sofort $(\forall n \in \omega) n \notin n$, was die Eigenschaft $n \notin n$ der $n \in \mathbb{N}$ nunmehr in die Theorie überträgt. Ebenso folgt $\omega \subseteq \mathcal{T}r$, was die Aussage *Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist transitiv* in der Theorie reflektiert. Analog zeigt man jedes $n \in \omega$ ist erblich transitiv und überträgt die Übungen 4,5,6 aus **2.3** mit Satz 6.5 mühelos in die Theorie.

Auch ω selbst ist transitiv, denn man verifiziert leicht $\{n \in \omega \mid n \subseteq \omega\}$ ist induktiv. Das nun hat nach folgendem Satz die Konsequenz, daß jede induktive Menge unendlich ist, womit nachträglich gezeigt ist, daß AI den Namen Unendlichkeitsaxiom zu Recht trägt. Hingegen ist jedes $n \in \omega$ endlich, denn $\mathcal{F}in$ ist induktiv und damit ist $\omega \subseteq \mathcal{F}in$.

Satz 6.6. *ω ist unendlich.*

Beweis. Man betrachte das Teilmengensystem $s = \omega$ von ω – man beachte, daß jedes $n \in \omega$ ist wegen der Transitivität von ω auch Teilmenge von ω, und zwar echte Teilmenge, weil $n \in \omega$ aber $n \notin n$. Damit erfüllt s die Bedingungen in Satz 6.4. ❑

Satz 6.7. *ω ist $\in$-geordnet.*

Beweis. Da $n \notin n$ und n transitiv ist, verbleibt nur $(*)$: $m \in n \vee m = n \vee n \in m$ zu beweisen. Das gilt gewiß für $n = 0$. Sei $(*)$ für $m, n \in \omega$ angenommen. Wir zeigen dasselbe für n^{+1}. Falls $m \in n$ oder $m = n$ ist sicher $m \in n^{+1}$. Falls aber $n \in m$, so ist $n^{+1} \in m$ oder $n^{+1} = m$ (Übung 4 in **2.4**). Also gilt $(*)$ auch für n^{+1}. ❑

Von jetzt an schreiben wir für $m, n \in \omega$ meistens $m < n$ anstatt $m \in n$. Eine häufig benutzte, auf dieser Anordnung von ω benutzende Variante von Satz **6.5** ist

Satz 6.8 ($<$-Induktionssatz für ω). *Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, so daß $n \in \mathcal{E}$ wenn immer $k \in \mathcal{E}$ für alle $k < n$. Dann ist $\omega \subseteq \mathcal{E}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}' := \{n \in \omega \mid (\forall k < n) k \in \mathcal{E}\}$. Sicher gilt $0 \in \mathcal{E}'$. Sei $m \in \mathcal{E}'$. Wir zeigen $m^{+1} \in \mathcal{E}'$. Denn für $n \leqslant m^{+1}$ ist entweder $n \leqslant m$ und damit $n \in \mathcal{E}$, oder $n = m$ und damit $n \in \mathcal{E}$ nach Voraussetzung des Satzes. Also $\omega \subseteq \mathcal{E}'$ $(\subseteq \mathcal{E})$ nach Satz **6.5**. ❑

Bemerkung. Da ω die kleinste induktive Menge ist und alle Von Neumannschen natürlichen Zahlen enthält, erhebt sich folgende die Frage: Enthält ω genau diese Zahlen oder vielleicht noch weitere Elemente? Dazu ist zu bemerken, daß zwar die einzelnen Elemente von $\mathbb{N}$ Objekte unserer deduktiven Theorie sind ebenso wie ω, nicht aber die von außen gegebene Gesamtheit $\mathbb{N}$. Daher läßt sich nicht erwarten, daß $\mathbb{N}$ sich in der Sprache $\mathcal{L}_\in$ aussondern läßt, es sei denn man erlaubt unendlich lange Formeln, so daß dann geschrieben werden dürfte $x \in \mathbb{N} \leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots$ In der mathematischen Logik wird gezeigt, daß unter der Annahme der Konsistenz von ZFC auch ein Modell existiert, in welchem ω außer den Von Neumannschen Zahlen noch andere Elemente enthält (sogenannte Nichtstandard-Zahlen). Aber ω verhält sich insgesamt so wie $\mathbb{N}$, d.h. es gelten für $\mathbb{N}$ in der Metatheorie und für ω in der Theorie dieselben zahlentheoretischen Eigenschaften.

Es gibt mehrere explizite Definition von ω, die auf der Basis von AI mit der obigen äquivalent sind. Eine solche könnte lauten: ω ist die Menge aller $\in$-geordneten Mengen z so daß jedes nichtleere $u \subseteq z$ ein minimales und maximales Element bzgl. $\in$ besitzt. Es gibt auch Definitionen von ω, die unabhängig von AI sind. Dann gewinnt man ω zwar nur als Klasse, aber man kann auch mit der Klasse ω sehr gut leben und in ZF ohne AI sogar die gesamte Zahlentheorie entwickeln. Eine solche Definition benötigt man z.B. in der Theorie $\mathsf{ZFC}_{\text{fin}}$ der endlichen Mengen. Die wohl einfachste von AI unabhängige Definition von ω als Klasse ist $\omega := \{z \mid \forall a[\emptyset \in a \wedge (\forall x \in a)(x^{+1} \in a \vee x = z) \to z \in a]\}$.

Übungen

1. Man zeige, mit a, b ist auch $a \cup b$ immer endlich.

   Hinweis. Für $\mathcal{U} = \{x \mid a \cup x \text{ endlich}\}$ gilt $\mathcal{F}in \subseteq \mathcal{U}$.

2. Sei F ein beliebiger Operator auf $\mathcal{V}$ und a endlich. Man zeige (ohne AR): $\{F(x) \mid x \in a\}$ ist endliche Menge.

3. Man zeige, mit a ist $\mathfrak{P}(a)$ endlich, und mit a, b auch $a \times b$.

   Hinweis. $\mathfrak{P}(x \cup \{y\}) = \mathfrak{P}(x) \cup \{u \cup \{y\} \mid u \in \mathfrak{P}(a)\}$.

4. Eine $\in$-geordnete Menge a heiße $\in$-*wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge $u \subseteq a$ ein kleinstes Element bezüglich dieser Ordnung hat. Zeige induktiv: jedes $n \in \omega$ ist $\in$-wohlgeordnet.

5. Man beweise (mit AI) $\omega = \Omega := \{z \mid \forall a[\emptyset \in a \wedge (\forall x \in a)(x^{+1} \in a \vee x = z) \to z \in a]\}$.

   Hinweis. $\Omega \subseteq \omega$: Wähle $a = \omega$. $\omega \subseteq \Omega$: Ω ist induktiv.

2.7 Das Auswahlaxiom

Das berühmteste aller mengentheoretischen Axiome ist das von Zermelo als solches bezeichnete *Auswahlaxiom*:

AC: Ist $s \neq \emptyset$ ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen, so existiert eine Menge z (eine „Auswahlmenge"), die mit jedem $a \in s$ genau ein Element gemeinsam hat.

In dieser Formulierung sieht es äußerst harmlos aus, und tatsächlich wurde AC schon vor seiner expliziten Formulierung lange vorher als eine Art logisches Hilfsmittel verwendet, etwa von Cauchy und Weierstraß in ihrer neu begründeten Analysis. Auch Cantor verwendete das Auswahlprinzip gelegentlich naiv, ohne dies hervorzuheben. Erst erst nach seiner allgemeinen Formulierung und vor allem durch seine zielgerichtete Anwendung zum Beweis des Wohlordnungssatzes durch Zermelo machten sich die Mathematiker klar, das man es hier zumindest in der Anwendung auf unendliche Gesamtheiten nicht mit einem logischen Prinzip zu tun hat. Seither ist es ein permanentes Diskussionsthema, nicht nur in der Mengenlehre.

Es ist nicht die Tatsache einiger höchst unanschaulicher und paradox anmutender Konsequenzen von AC welche die Diskussionen über AC verursacht. Es wird auch nicht ernsthaft an seiner universellen Gültigkeit gezweifelt. Auch mit unangenehmen Konsequenzen hat man sich abgefunden, z.B. der Existenz nicht meßbarer Mengen reeller Zahlen oder der Zerlegbarkeit einer Kugel in endlich viele Teile, aus denen man zwei Kugeln derselben Größe wie die usprüngliche zusammenbauen kann (das Banach-Tarski Paradoxon). Mathematiker haben gelernt mit Diskrepanzen zwischen Anschauung und Wirklichkeit zu leben und ihre Anschauung dementsprechend zu schärfen. Vielmehr resultiert das fortwährende Interesse an AC aus seinem besonderen Charakter im Vergleich mit den übrigen mengentheoretischen Axiomen.

Diese sind nämlich von der Art, daß sie den Mengencharakter gewisser explizit definierbarer Gesamtheiten postulieren; sie versichern uns, daß gewisse definite Klassen als Mengen bezeichnet werden dürfen, ohne daß Widersprüche zu befürchten sind. Hingegen ist AC ein bloßes Existenzpostulat: es wird keine Vorschrift angegeben, in welcher Weise aus den nichtleeren Mengen eines disjunkten Mengensystems je ein Element auszuwählen wäre. Noch krasser wird diese Unbestimmtheit der Art und Weise des Auswählens bei vielen Konsequenzen von AC. Obwohl sich z.B. die reellen Zahlen unter vielerlei Aspekten anschaulich beschreiben lassen, ist es nie gelungen, eine gemäß AC existierende Wohlordnung von $\mathbb{R}$ auch nur andeutungsweise zu beschreiben.

Diese Besonderheiten von AC haben dazu geführt, den Gebrauch von AC in Sätzen der Mengenlehre in der Regel anzuzeigen und AC überhaupt nur dann zu verwenden, wenn dies unumgänglich ist. Dies ist nun auch wieder nicht verursacht durch eine Furcht vor Widersprüchen, die durch AC verursacht werden könnten – denn dafür wäre AC nicht verantwortlich, siehe **4.1** – sondern im Hinblick auf den stark nichtkonstruktiven Charakter dieses Axioms. Wir werden uns erst in Kapitel **4** mit den Konsequenzen von AC und gleichwertige Formulierungen beschäftigen.

Übungen

1. Man zeige *ohne* AC: Sei s ein *endliches* System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Auswahlmenge c für s, d.h. $c \cap a$ ist Einermenge für alle $a \in s$.

   Hinweis. Induktionssatz für endliche Mengen. Für $s = \emptyset$ ist $c = \emptyset$ trivialerweise Auswahlmenge. Sei s ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen mit einer Auswahlmenge c. Ferner sei b eine beliebige nichtleer Menge derart, daß $a \cap b = \emptyset$ für alle $a \in s$ und etwa $e \in b$. Dann ist $c \cup \{e\}$ Auswahlmenge für $s \cup \{b\}$. Zwar hängt diese vom Parameter e ab, aber gleichwohl haben wir damit folgende leicht formalisierbare Aussage bewiesen: *Ist s ein System paarweise disjunkter Mengen und existiert eine Auswahlmenge für s und ist ferner auch $s \cup \{b\}$ ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen, so existiert auch eine Auswahlmenge für $s \cup \{b\}$.*

2. Auf AC beruht die häufig vollzogene *Klassenauswahl*: Sei $(\forall a \in s)\exists y\, \varphi(a, y)$ bewiesen und die Klassen $\mathcal{C}_a = \{y \mid \varphi(a, y)\}$, $a \in s$, seien paarweise disjunkt. Zeige mittels AC und Acol *es gibt eine* Menge c, *so daß* $(\forall a \in s)(\exists! y \in c)\varphi(a, y)$.

   Hinweis. Acol liefert ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen.

3. AC_n laute *Für die Menge a_n aller n-elementigen Teilmenge einer Menge a gibt es eine Auswahlmenge* $(n = 2, 3, \dots)$. Man zeige, AC_2 impliziert AC_4 (Tarski; hingegen gilt nicht $\mathsf{AC}_2 \to \mathsf{AC}_n$ weder für $n = 3$ noch für $n > 4$).

   Hinweis. Sei f Auswahlfunktion für a_2 und $u \in a_4$. Für $x \in u$ sei q_x Anzahl aller $\{x, y\} \in a_2$ mit $f(\{x, y\}) = x$, q das kleinste aller q_x und $v = \{x \in u \mid q_x = q\}$. Zeige $v \subset u$. Bestimme Auswahl g(u) wie folgt: Ist $v \in u_1$, sei g(u) das Element in v. Ist $v \in u_3$, sei $g(u)$ das Element in $u \setminus v$. Ist $v \in u_2$, sei $g(u) = f(v)$.

2.8 Das Fundierungsaxiom

Eine kurzgefaßte wenn auch unvollständige Motivierung für die Einführung des Fundierungsaxioms ist die Tatsache, daß in der Mathematik nirgendwo Mengen $a, a_1, a_2, \ldots$ auftreten, die eine unendliche absteigende $\in$-Kette $\ldots \in a_2 \in a_1 \in a$ bilden. Ebensowenig begegnet man dort „$\in$-Kreisen“ $a_0 \in a_1 \in a_2 \in \ldots \in a_n \in a_0$. Jede Menge a mit $a \in a$ wäre ein Beispiel für $n = 1$. Die Existenz solcher Mengen kann auch mit den bisherigen Axiomen nicht gefolgert werden; sie kann allerdings ebensowenig widerlegt werden. Solche Mengen passen jedenfalls nicht in unser intuitives Bild. Sie werden ausgeschlossen durch das folgende Axiom, dessen Diskussion die Vorstellung des Axiomensystems ZFC beendet. Die vollen Konsequenzen dieses Axioms zeigen sich erst im Zusammenhang mit der Von Neumann'schen Hierarchie. Der Ausschluß von $\in$-Kreisen ist nur ein bescheidener Teilaspekt des Axioms.

AF : $(\forall x \neq \emptyset)(\exists y \in x)(\forall z \in x) z \notin y$ Das *Fundierungsaxiom.*

Inhaltlich besagt AF : jede nichtleere Menge enthält wenigstens ein $\in$-minimales Element. Eine kürzere Formulierung von AF ist $(\forall x \neq \emptyset)(\exists y \in x)\, x \cap y = \emptyset)$.

Sei $\mu x := \{y \in x \mid x \cap y = \emptyset\}$ die *Menge der $\in$-minimalen Elemente* von x. Dann läßt sich AF auch in der Weise $\mu x \neq \emptyset$ für alle $x \neq \emptyset$ formulieren. Eine Menge a heiße *fundiert* (genauer $\in$-fundiert), wenn $\mu b \neq \emptyset$ für jedes nichtleere $b \subseteq a$. Aus AF folgt offenbar, daß jede Menge fundiert ist. Daher der Name des Axioms.

AF schließt insbesondere die Existenz von Mengen $a \in a$ aus, weil das einzige Element von $\{a\}$ wegen $\mu\{a\} \neq \emptyset$ dann auch das $\in$-minimale sein muß. Das System ZFC ohne AC wird mit ZF bezeichnet, während ZFC$^-$ nachfolgend das System ZFC ohne AF bezeichnet. Die Sonderrolle von AF ist eine andere als die von AC. Sie besteht eigentlich nur darin, daß AF trotz seiner Bedeutung für die Mengenlehre selbst nur geringe zusätzliche Erträge einbringt, was mengentheoretische Anwendungen in der Mathematik betrifft.

Wenn dem so ist, kann man natürlich die Frage stellen, wird durch AF die Mengenbildung nicht unnötig eingeschränkt? Nun, aus pragmatischer Sicht gibt es keine Anhaltspunkte dafür, daß AF die Reichhaltigkeit der Theorie beeinträchtigt. Man kann AF als ein Normierungsprinzip ansehen, daß uns unnötigen Ballast fernhält. AF verursacht eine hierarchische Struktur des Mengen-Universums wie in Kapitel **5** detailliert dargelegt wird. Ein erstes Indiz hierfür ist die Äquivalenz von AF mit dem sogenannten *Schema der $\in$-Induktion*

$$Ind_{\in}\ :\quad \forall v((\forall x \in v)\varphi(x) \to \varphi(v)) \to \forall v \varphi(v).$$

Dabei ist $\varphi = \varphi(v)$ beliebig aus $\mathcal{L}_{\in}$. Mit $\mathcal{U} = \{x \mid \varphi(x)\}$ kann $Ind_{\in}$ auch in der Weise

$$(\forall v \subseteq \mathcal{U}) v \in \mathcal{U} \to \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

geschrieben werden. Kurzum, eine $\in$-induktive Klasse – eine solche enthält jede Teilmenge auch als Element, siehe **2.1** – umfaßt ganz $\mathcal{V}$. So ist z.B. die Russell-Klasse $\mathcal{R}$ nach Übung 3 in **2.1** $\in$-induktiv, also ist diese mit $\mathcal{V}$ identisch, was $v \notin v$ beweist. Auch die Klasse aller Mengen mit einer transitiven Obermenge gibt sich unschwer als $\in$-induktiv zu erkennen: Haben alle $x \in a$ eine solche und existiert damit die transitive Hülle x^{tc}, so ist $a \cup \bigcup\{x^{tc} \mid x \in a\}$ transitive Obermenge von a.

Übung 2 zeigt $Ind_{\in} \Rightarrow$ AF, denn die Klasse der unten definierten grundierten Mengen ist $\in$-induktiv. Für die Umkehrung geben wir zunächst folgenden naiven und kommentarbedürftigen Beweis. Sei $\mathcal{U}$ $\in$-induktiv und angenommen $x_0 \notin \mathcal{U}$. Dann ist $x_1 \notin \mathcal{U}$ für ein gewisses $x_1 \in x_0$. Aus demselben gibt es ein $x_2 \in x_1$ mit $x_2 \notin \mathcal{U}$ usw. Offenbar ist $\{x_0, x_1 \dots\}$ nicht fundiert, im Wiederspruch zu AF. Dieser Beweis ist deshalb unschön, weil er das Auswahlaxiom unnötigerweise benutzt. Abgesehen davon ergibt sich der Mengencharakter von $\{x_0, x_1 \dots\}$ erst mit dem später bewiesenen Rekursionstheorem. Wir raten daher, dem Hinweis zu Übung 3 zu folgen.

Mitunter wird schlichtweg behauptet, AF sei wahr (wie die übrigen Axiome, siehe z.B. [Shoenfield 1977]). Wir wollen uns auf eine riskante Diskussion über den Wahrheitsbegriff in der Mathematik nicht einlassen, sondern wollen nur festhalten, daß AR im Grunde nur ein besonders bequemes Axiom für die Mengenlehre darstellt. Natürlich stellt sich dann die Frage, wozu ein zusätzliches Axiom, weil zusätzliche Axiome immer auch die Frage der Widerspruchsfreiheit aller Axiome neu aufwerfen. Diese Frage muß man im allgemeinen sehr ernst nehmen. Im vorliegenden Falle könnte man z.B. durchaus den Verdacht hegen, daß gewisse mittels der übrigen Axiome konstruierbare Mengen nicht fundiert sind. Deren Existenz stünde dann mit dem Postulat AF im Widerspruch und dies hätte die Inkonsistenz des gesamten Systems zur Folge.

Nun kann das Problem dieser relativen Widerspruchsfreiheit im vorliegenden Falle wenn auch nicht unmittelbar, so doch mit verhältnimäßig einfachen Überlegungen aus dem Wege geräumt werden. Wir werden im nächsten Abschnitt schon beweisen, daß die Widerspruchsfreiheit von ZFC garantiert ist, wenn nur die von ZFC^{-} gewährleistet ist. Der wesentliche Grund hierfür ist der sogleich erbrachte Nachweis, daß alle aus $\emptyset$ mittels der Operatoren $\bigcup, \mathfrak{P}, \{,\}$, sowie der Teilmengenbildung konstruierten Mengen die in AF geforderte Eigenschaft haben und daß AI auch die Existenz einer fundierten induktiven Menge sichert. Aber das reicht noch nicht hin. Wir betrachten aus diesem Grunde und als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt eine Verschärfung der Eigenschaft der Fundiertheit.

Definition. Eine Menge x heiße *grundiert*, wenn $\mu a \neq \emptyset$ für jede Menge a mit $x \in a$.

So ist sicher $\emptyset$ grundiert, denn wenn $\emptyset \in a$, so ist $\emptyset$ ein $\in$-minimales Element von a. Hier gilt nun

Satz 8.1. *x ist genau dann grundiert, wenn alle $y \in x$ grundiert sind.*

Beweis. Das ist trivialerweise richtig für $x = \emptyset$. Sei also $x \neq \emptyset$ grundiert, $y \in x$ und $y \in a$. Wir haben zu zeigen $\mu a \neq \emptyset$. Wegen $x \in a \cup \{x\}$ ist $\mu(a \cup \{x\}) \neq \emptyset$. Weil $y \in x \cap (a \cup \{x\})$, kann x nicht $\in$-minimales Element von $a \cup \{x\}$ sein, also existiert ein $u \in a$ mit $u \cap (a \cup \{x\}) = \emptyset$. Erst recht ist dann $u \cap a = \emptyset$, folglich $u \in \mu a$. Seien umgekehrt alle $y \in x$ grundiert und $x \in a$. Zu zeigen ist $\mu a \neq \emptyset$. Ist $x \cap a = \emptyset$, so ist $x \in \mu a$. Andernfalls existiert ein $y \in x \cap a$ und y ist gemäß Annahme grundiert. Wegen $y \in a$ ist auch jetzt $\mu a \neq \emptyset$. ❏

Korollar 8.2. *Eine grundierte Menge x ist auch fundiert.*

Denn ist $u \subseteq x$ nichtleer, etwa $y \in u$, so ist y nach Satz **8.1** grundiert, also $\mu u \neq \emptyset$.

Damit wären alle bisher explizit konstruierten Mengen $a \neq \emptyset$ fundiert, falls uns der Nachweis gelingt, daß sie sämtlich grundiert sind. Das aber wird sich leicht aus Satz **8.1** ergeben, der unter sehr schwachen Voraussetzungen gilt. Es wird dort nebst AE nämlich nur der Mengencharakter von $a \cup \{x\}$ benutzt. Daher gelten auch die folgenden Aussagen unabhängig von AF :

Satz 8.3. *Mit x ist auch jede Teilmenge von x grundiert, sowie $\bigcup x$, $\mathfrak{P}(x)$ und $x^{+1} = x \cup \{x\}$.*

Beweis. Sei x grundiert. Dann sind gemäß Satz **8.1** alle Elemente von x grundiert und wiederum nach Satz **8.1** alle Teilmengen. Ferner sind die Elemente der Elemente von x grundiert, also auch $\bigcup x$. Da alle Teilmengen von x grundiert sind, ist nach Satz **8.1** auch $\mathfrak{P}(x)$ grundiert. Damit ist wegen $x \cup \{x\} \subseteq \bigcup\bigcup\{\mathfrak{P}x, \mathfrak{P}\mathfrak{P}x\}$ dann auch x^{+1} grundiert. ❏

Weil $\emptyset$ grundiert ist und mit x auch x^{+1}, ist die Eigenschaft 'grundiert' induktiv. Nach Satz 9.1 sind damit alle $z \in \omega$, und somit ω selbst grundiert. Dies beweist

Korollar 8.4. *ω ist grundiert und damit auch fundiert.*

In **2.9** wird gezeigt, daß auch Ersetzung und Auswahl von grundierten wieder zu grundierten Mengen führen. Es hat plötzlich den Anschein als könnten wir andere als grundierte Mengen mittels unserer Axiome überhaupt nicht konstruieren. Das ist in der Tat so. Man kann sogar viel weniger Mengen wirklich nur „konstruieren". Der tiefere Grund ist, daß AP uns zwar die Menge aller Teilmengen einer Menge garantiert, aber weder dieses noch die übrigen Axiome erzählen uns genau, wie kompliziert Teilmengen einer (unendlichen) Menge wirklich sein können. Selbst die uns durch Aussonderung und Auswahl garantierten Teilmengen können so hochkompliziert sein, daß ihre Beschreibung unser Vorstellungsvermögen überschreitet.

Von der Konsistenz von AF mit den übrigen Axiomen sind wir nun fast überzeugt. Den rigorosen Beweis erbringen wir im nächsten Abschnitt. Bedeutsamer als das Resultat ist die dort vorgeführte Methode.

Übungen

1. Man beweise unter Verwendung von AF die Aussagen
   (a) $\forall x x \neq x^{+1}$,
   (b) $\forall x, y(x^{+1} = y^{+1} \to x = y)$,
   (c) $\neg\exists x_0 \dots x_n(x_0 \in x_1 \in x_2 \dots \in x_n \in x_0)$ $(n = 1, 2, \dots)$.

2. Man beweise $Ind_\in$ impliziert AF in ZF ohne AF.

   Hinweis. Die Eigenschaft 'grundiert' ist $\in$-induktiv und alle grundierten Mengen sind fundiert.

3. Man beweise $Ind_\in$ in ZF (d.h. ohne AC).

   Hinweis. Sei $a \notin \mathcal{U}$ und u transitive Menge mit $a \subseteq u$ [4]) so daß $a \in v$ für die gleichfalls transitive Menge $v = \mathfrak{P}(u)$. Es gibt ein $\in$-minimales $b \in v$ mit $b \notin \mathcal{U}$. Dann folgt der Widerspruch $b \subseteq U$.

4. Man beweise ohne AF: Ist a eine mindestens n-elementige transitive fundierte Menge, so ist $n \subseteq a$. Es gibt demnach nur eine n-elementige Menge dieser Art, nämlich n, und man hat eine weitere Definitionsmöglichkeit natürlicher Zahlen in schwachen Mengentheorien vor sich.

[4])Die Existenz einer transitiven Obermenge folgt leicht durch ω-Rekursion, Beispiel 1 in **5.1**.

2.9 Relative Konsistenz des Fundierungsaxioms

Wir wollen jetzt detailliert darlegen, daß AF mit den übrigen Axiomen von ZFC verträglich ist. Mit anderen Worten: läßt sich in ZFC^- (= ZFC) ohne AF) kein Widerspruch herleiten – das ist unsere Grundannahme – so gelingt dies auch nicht in ZFC. Der Anfänger darf diesen Abschnitt vorerst auch übergehen.

Wir machen uns erst eine bildhafte Vorstellung unseres Vorhabens. Gegeben sei ein Universum $\mathcal{V}$, auf welchem die Axiome von ZFC^- gelten. $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ sei die Teilklasse aller grundierten Mengen. Unser Ziel ist der Nachweis, daß in $\mathcal{W}$ alle Axiome von ZFC gelten, AF eingeschlossen. $\mathcal{W}$ ist demnach selbst ein Universum, das nicht nur die ursprünglichen Axiome, sondern zusätzlich das Fundierungsaxiom erfüllt. Wie schon gesagt, ist dies nur eine erst Veranschaulichung dessen, was wirklich getan wird. Wir verbleiben nämlich bis einschließlich Satz 9.1, gänzlich im Rahmen von ZFC^- und beweisen dort eine Anzahl von Fakten. Der Rest, der eigentliche Konsistenzbeweis, ist dann nur noch eine Routineangelegenheit der reinen Logik.

Die hier vorgeführte Methode heißt *Methode der inneren Modelle*. Bildlich gesprochen wird ein Modell unter Erhalt des $\in$-Prädikats auf einer Teilklasse $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ konstruiert und bewiesen, daß $\mathcal{W}$ die auf $\mathcal{W}$ relativierten Axiome erfüllt [5)].

Bemerkung. Der Vorteil des hier vorgeführten rigorosen Konsistenzbeweises ist nicht nur ein didaktischer – nämlich daß er in einem ganz frühen Entwicklungsstadium der Mengentheorie ausgeführt werden kann – er wird zugleich auch die Konsistenz von Z bezüglich Z^- zeigen. Denn weder im Nachweis, daß $\mathcal{W}$ transitiv und $\in$–induktiv, noch im Beweis der relativierten Axiome (außer bei AR selbst) ist das Ersetzungsaxiom involviert. Dieser Konsistenzbeweis gelingt nicht mit dem inneren Modell der Von Neumann'schen Hierarchie oder dem Modell aller Mengen, deren transitive Hülle fundiert ist. Dort benutzt man mindestens die Existenz der transitiven Hülle. Diese ist aber in Z und auch in ZC nicht beweisbar (Jensen, Schröder 1969).

Wir benutzen jetzt neben den Variablen $x, y, \ldots$ auch entsprechende Großbuchstaben $X, Y, \ldots$ als Variable, aber ausschließlich für Mengen aus $\mathcal{W}$. Jedem $\varphi \in \mathcal{L}_\in$ ordnen wir die Formel $\varphi^{\mathcal{W}}$ zu, die sich von φ nur dadurch unterscheidet, daß alle gebundenen Variablen von φ durch die entsprechenden Großbuchstaben $X, Y, \ldots$ ersetzt wurden. Diese Formeln interpretieren wir in natürlicher, der obigen Verabredung entsprechenden Weise als $\mathcal{L}_\in$-Formeln, die nur kleine Variablen enthalten.

[5)] Es gibt eine zweite grundlegende Methode zur Modellkonstruktion, die Forcing-Methode. Dort wird, bildlich gesprochen, der Bereich $\mathcal{V}$ vergrößert. Nebenbei bemerkt ist $\mathcal{W}$ bereits in Z echte Klasse gemäß Übung 3 in **2.1**.

So bedeutet z.B. $\forall X\,\exists Y\; X\in Y$ sinngemäß, daß zu jedem $x\in\mathcal{W}$ ein $y\in\mathcal{W}$ mit $x\in y$ existiert, also die (immer noch abgekürzte) $\mathcal{L}_\in$-Aussage $(\forall x\in\mathcal{W})(\exists y\in\mathcal{W})x\in y$. Und $\exists X\in y$ bedeutet $(\exists x\in\mathcal{W})x\in y$. Man nennt $\varphi^{\mathcal{W}}$ die auf $\mathcal{W}$ *Relativierte* von φ.

$\varphi^{\mathcal{W}}$ kann auch ohne Benutzung großer Variablen induktiv wie folgt erklärt werden Für Primformeln φ sei $\varphi^{\mathcal{W}}=\varphi$. Ferner sei $(\neg\varphi)^{\mathcal{W}}=\neg\varphi^{\mathcal{W}}$, $(\varphi\wedge\psi)^{\mathcal{W}}=\varphi^{\mathcal{W}}\wedge\psi^{\mathcal{W}}$ und analog für $\vee$ und $\to$. Entscheidend sind die Klauseln

$$(\exists x\varphi)^{\mathcal{W}}=(\exists x\in\mathcal{W})\varphi^{\mathcal{W}} \text{ und } (\forall x\varphi)^{\mathcal{W}}=(\forall\in\mathcal{W})\varphi^{\mathcal{W}}.$$

Wenn wir jetzt behaupten, AF gelte in $\mathcal{W}$, so ist gemeint, daß die Aussage

$$\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}:\quad \forall X[\exists Z\; Z\in X\to(\exists Y\in X)(\forall Z\in X)Z\notin Y]$$

in ZFC^- beweisbar ist, wobei $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$ im Sinne obiger Erklärung folgende immer noch teilweise stenographisch notierte $\mathcal{L}_\in$–Aussage ist:

$$(\forall x\in\mathcal{W})[(\exists z\in\mathcal{W})z\in x\to(\exists y\in\mathcal{W})(y\in x\wedge(\forall z\in\mathcal{W})(z\in x\to z\notin y))].$$

$\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$ besagt, jedes $x\in\mathcal{W}$ hat ein $\in$–minimales Element „im Sinne von $\mathcal{W}$“. Um diese Redeweise allgemeiner zu präzisieren, betrachten wir statt $\mathcal{W}$ irgend eine nichtleere Klasse $\mathcal{U}$ bezüglich ZFC^-. Die Relativierte $\varphi^{\mathcal{U}}$ sei völlig analog wie oben erklärt, aber mit der Intension, daß $\mathcal{U}$ der Variablenbereich für Großbuchstaben ist.

Definition. Ein durch $\varphi=\varphi(\vec{x})$ definierten n–stelliges Prädikat $\mathcal{Q}$ heißt *absolut* für $\mathcal{U}$ wenn $(\forall\vec{x}\in\mathcal{U})(\varphi(\vec{x})\leftrightarrow\varphi^{\mathcal{W}}(\vec{x}))$ (in ZFC^-) beweisbar ist.

Bezeichnet $\mathcal{Q}^{\mathcal{W}}$ das durch $\varphi^{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{U}$ definierte Prädikat, so heißt dies, $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}^{\mathcal{W}}$ stimmen auf $\mathcal{U}$ überein; kurzum, $\mathcal{Q}(x_1,\dots,x_n)$ gilt für $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{U}$ genau dann, wenn „$\mathcal{Q}(x_1,\dots,x_n)$ im Sinne von $\mathcal{U}$“. Für $n=0$ bedeutet dies, daß die Aussagen φ und $\varphi^{\mathcal{W}}$ in ZFC^- äquivalent sind. Alle diese Erklärungen können wir statt auf ZFC^- natürlich auf andere interessierende Fragmente von ZFC beziehen.

Beispiel. Wir behaupten, das Prädikat ‘$x\subseteq y$’ ist absolut für $\mathcal{W}$. Dazu ist ohne Fundierungsaxiom zu beweisen $(*)$: $(\forall x,y\in\mathcal{W})(\forall Z(Z\in x\to Z\in y)\leftrightarrow\forall z(z\in x\to z\in y))$. Seien $x,y\in W$ und $\forall Z(Z\in x\to Z\in y)$ angenommen. Zum Nachweis von $z\in x\to z\in y$ für beliebiges z und sei $z\in x$. Weil nun $\mathcal{W}$ transitiv ist, ist sicher auch $z\in\mathcal{W}$. Also $z\in y$. Die andere Richtung von $\leftrightarrow$ ist klar und $(*)$ damit bewiesen.

Wir schreiben $\Sigma\vdash\varphi$ für ‘φ ist aus den Axiomen des Axiomensystems Σ beweisbar’.

Satz 9.1. $\mathsf{ZFC}^-\vdash\varphi^{\mathcal{W}}$ *für jedes Axiom* φ *von* ZFC.

Beweis. Wir beweisen zuerst $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$. Sei ein nichtleeres $x \in \mathcal{W}$ gegeben. Dann hat x ein $\in$–minimales Element y. Nach Satz **8.1** ist $\mathcal{W}$ eine transitive Klasse, also liegt y auch in $\mathcal{W}$. Weil $z \notin y$ für alle $z \in x$, gilt das erst recht für alle $z \in \mathcal{W}$. Damit gilt $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$, d.h. $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$ wurde in ZFC^- bewiesen[6)]. Als nächstes beweisen wir $\mathsf{AE}^{\mathcal{W}}$, also die Aussage $(\forall x \in \mathcal{W})(\forall y \in \mathcal{W})[(\forall z \in \mathcal{W})(z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y)]$.

Denn seien $x, y \in \mathcal{W}$ gegeben. Obgleich x und y nur die gleichen Elemente aus $\mathcal{W}$ besitzen, enthalten x, y insgesamt dieselben Elemente, weil alle $z \in x$, $z \in y$ automatisch in $\mathcal{W}$ liegen (Satz **8.1**). Also folgt $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ und damit tatsächlich $x = y$. Auf diese Weise überprüfen wir alle übrigen Axiome. Dabei kann auf das Aussonderungs- und Paarmengenaxiom verzichtet werden, weil diese aus den verbleibenden Axiomen herleitbar sind.

Daß $\mathsf{AU}^{\mathcal{W}}$ und $\mathsf{AP}^{\mathcal{W}}$ beweisbar sind, ist ziemlich genau der Inhalt des Satzes 8.3 in **2.8**. Man verdeutliche sich nun, daß $\bigcup a$ auch die Vereinigungsmenge im Sinne von $\mathcal{W}$ ist und dasselbe für $\mathfrak{P}(a)$; kurz, $\bigcup$ und $\mathfrak{P}$ sind absolut für $\mathcal{W}$. Ebenso ist $\mathsf{AI}^{\mathcal{W}}$ beweisbar, denn das läuft auf die Behauptung hinaus, daß eine induktive grundierte Menge existiert: ω ist eine solche. Also muß man nur noch überlegen, daß eine induktive Menge auch induktiv ist im Sinne von $\mathcal{W}$. Das ist nicht schwer, denn das Prädikat 'induktiv' erweist sich leicht als absolut (Übung 2).

$\mathsf{AC}^{\mathcal{W}}$ ist beweisbar, weil ein System $S \neq \emptyset$ nichtleerer grundierter Mengen, die im Sinne von $\mathcal{W}$ paarweise disjunkt sind, auch tatsächlich paarweise disjunkt sind. Eine Auswahlmenge a für S ist wegen $a \subseteq \bigcup S$ grundiert und daher auch Auswahlmenge im Sinne von $\mathcal{W}$. Was verbleibt, ist für vorgegebenes $\varphi(x, y)$ der Beweis von

$$\mathsf{AR}^{\mathcal{W}}: \quad \forall X \exists! Y \psi \rightarrow \exists U \forall Y((\exists X \in A)\psi \leftrightarrow Y \in U),$$

mit $\psi = \psi(X, Y) := \varphi^{\mathcal{W}}$. Sei also $\forall X \exists! Y \psi$ angenommen. $\psi(X, Y)$ definiert i.a. keinen Operator in $\mathcal{V}$, aber wir definieren einen solchen durch

$$F(x) = \begin{cases} \{y\} \text{ mit } y \in \mathcal{W} \text{ und } \psi(x, y), \text{ falls } x \in \mathcal{W}; \\ \emptyset \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\{F(x) \mid x \in A\}$ Menge gemäß AR. Für $x \in A$ ist $x \in \mathcal{W}$ und man sieht klar, daß $F(x) \in \mathcal{W}$ in jedem Falle. Nach Satz **8.1** liegt dann $\{F(x) \mid x \in A\}$ in $\mathcal{W}$ und somit auch $\mathcal{U} := \bigcup\{F(x) \mid x \in A\} = \{y \mid (\exists x \in A)\psi(x, y)\}$. Es ist nun offensichtlich, daß $\mathcal{U}$ der Konklusion von $\mathsf{AR}^{\mathcal{W}}$ genügt. Damit ist der Satz bewiesen. ❑

[6)] Wir haben hier gezeigt: hat X ein $\in$–minimales Element, so hat X auch ein minimales Element im Sinne von $\mathcal{W}$. Auch die Umkehrung gilt, denn für jedes nichtleere $x \in \mathcal{W}$ ist bekanntlich $\mu x \neq \emptyset$. Also ist die Eigenschaft 'x hat ein $\in$–minimales Element' absolut für $\mathcal{W}$.

Hieraus erhalten wir die folgende Aussage, die *über* die Axiome der Mengenlehre spricht und insofern einen etwas anderen Status hat als Satz 9.1.

Satz 9.2. *Ist* ZFC^- *konsistent, so gilt das gleiche für* ZFC.

Beweis. Wir schreiben die Axiome von ZFC in der Sprache $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$ auf und nehmen an, es sei in ZFC ein Widerspruch, z.B. $\exists X\, X \neq X$, beweisbar [7] Ein Beweis dieses Widerspruchs ist, formal gesprochen, eine Folge π_i von Formeln aus $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$, endend mit der Aussage $\exists X\, X \neq X$. $\mathfrak{P}i$ enthält gewisse der im Beweis benötigten Axiome von ZFC, also Aussagen der Gestalt $\alpha^{\mathcal{W}}$, wobei $\alpha \in \mathcal{L}_\in$ entweder ein Axiom von ZFC^- oder die Aussage AF ist. π_i ist nach wohlbestimmten Regeln eines Logikkalküls aufgebaut, der sich um die Inhalte dieser Formeln nicht kümmert. Diese Regeln sind nun von der Art, daß π_i auch ein Beweis in $\mathcal{L}_\in$ ist, wenn man die vorkommenden $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$-Formeln wie angegeben als $\mathcal{L}_\in$-Formeln deutet und wenn man vorher $\exists X\, X = X$ (d.h. $\exists x\, x \in \mathcal{W}$) bewiesen hat, was offensichtlich ist. Hier benutzen wir einen aus der mathematischen Logik bekannten Sachverhalt, der rein beweistheoretischer Natur ist (siehe z.B. [Rautenberg 1995]). Fügt man für jedes der in π_i vorkommenden $\alpha^{\mathcal{W}}$ noch der Beweise gemäß Satz 9.1 zu π_i hinzu, so erhält man damit insgesamt einen Beweis für $\exists X\, X \neq X$ in $\mathcal{L}_\in$, d.h. für $\exists x (x \in \mathcal{W} \wedge x \neq x)$, und einen etwas verlängerten Beweis für $\exists x\, x \neq x$. Das aber wäre ein Beweis für die Inkonsistenz von ZFC^-. ❑

Die Methode zeigt klar, daß man ein inneres Modell zumindest für ZFC^- auf jeder Klasse $\mathcal{U}$ hätte konstruieren können, welche wie $\mathcal{W}$ folgende Eigenschaften hat:

(a) $\mathcal{U}$ ist transitiv, d.h. es ist beweisbar $(\forall x \in \mathcal{U}) x \subseteq \mathcal{U}$,

(b) $\mathcal{U}$ ist $\in$-induktiv, d.h. es ist beweisbar $(\forall x \subseteq \mathcal{U}) x \in \mathcal{U}$.

Verlangt man auch die Gültigkeit des Fundierungsaxioms auf $\mathcal{U}$, so gibt es keine große Auswahl: $\mathcal{W}$ ist das einzige innere Modell mit den Eigenschaften (a),(b) (Übung). Wir haben sozusagen Glück gehabt.

Bemerkung. Satz 9.2, eigentlich ein Metatheorem, ist natürlich wie alles in dieser Darstellung in ZFC beweisbar, weil ZFC seine eigene Syntax und das Beweisen problemlos beschreiben kann. Tatsächlich ist der Satz schon in PA und noch weitaus schwächeren arithmetischen Theorien beweisbar. Diesbezüglich sei z.B. auf [Rautenberg 1995] verwiesen.

Es ist nun eine höchst bemerkenswerte Tatsache, daß es ein inneres Modell von $\mathcal{V}$ (auf der Basis von ZF und damit auch von ZF^-) gibt, welches mehr Sätze erfüllt

[7] Es gibt einen etwas anderen sehr anschaulichen modelltheoretischen Beweis. Doch müßte man begründen, daß dieser das Axiom AF nicht benutzt.

als nur ZFC selbst, und zwar das von K. Gödel (1938) entdeckte und seither mit L bezeichnete Universum der sogenannten *konstruktiblen* Mengen. In diesem gilt u.a. das Auswahlaxiom und auch die Kontinuumhypothese, womit deren Konsistenz relativ zu ZF bewiesen sind. Um L zu erhalten, muß man sich erheblich mehr anstrengen, siehe z.B. [Kunen 1980]. Auf die Absolutheit von L bezüglich $\mathfrak{P}$ und der von $\mathfrak{P}$ abhängigen Operationen muß dabei allerdings verzichtet werden.

Übungen

1. Man beweise $\mathsf{Z}^- \vdash \alpha^{\mathcal{W}}$ für jedes der Aussonderungsaxiome α direkt.

2. Man zeige, ist $\mathcal{U}$ transitiv, so sind folgende Prädikate absolut:

   '$x \subseteq y$', '$x = \emptyset$', 'x hat ein $\in$–minimales Element',

   'x ist transitiv', 'x ist induktiv', '$y = x_1 \cup x_2$', [8)]

   '$y = \{x_1, x_2\}$', '$y = \bigcup x$', 'x ist natürliche Zahl', '$x = \omega$'.

3. Man verallgemeinere Übung 2 zu folgendem

   Satz. *Ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$ transitiv, so ist jedes Δ_0–definierbare Prädikat absolut für $\mathcal{U}$.*

   Dabei heißt $\mathcal{Q}$ Δ_0–*definierbar*, wenn für $\mathcal{Q}$ eine definierende Δ_0–Formel gibt. Δ_0–*Formeln* sind solche, die aus den Primformeln mittels $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ und beschränkter Quantifikation aufgebaut sind: es wird nur zugelassen, daß mit φ auch $(\exists x \in y)\varphi$ und $(\forall x \in y)\varphi$ Δ_0–Formeln sind $(x \neq y)$. Z.B. ist $\subseteq$ durch die Δ_0–Formel $(\forall z \in x) z \in y$ definierbar.

4. Sei F eine ein– oder mehrstellige Operation, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ eine transitive Klasse. F heiße *absolut* für $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{U}$ abgeschlossen ist bzgl. F (d.h. $x \in \mathcal{U} \to F(x) \in \mathcal{U}$ ist beweisbar) und wenn das Prädikat '$y = F(x)$' absolut ist. Man zeige, ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$ transitiv und gegenüber $\cup, \mathfrak{P}, \{,\}$ abgeschlossen, so sind diese Operationen automatisch absolut für $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ ist inneres Modell für ZC^-.

5. Man zeige in ZF^-: Es gibt genau eine transitive und $\in$-induktive Klasse $\mathcal{U}$, so daß AF in $\mathcal{U}$ gilt. Weil AF in $\mathcal{W}$ gilt, ist $\mathcal{W}$ diese Klasse.

[8)] Das bedeutet nicht, daß $\mathcal{U}$ gegenüber der Operation $\cup$ abgeschlossen sein muß. Es soll nur festgestellt werden: Ist $Y = X_1 \cup X_2$ im Sinne von $\mathcal{U}$, so ist tatsächlich $Y = X_1 \cup X_2$, und umgekehrt.

Kapitel 3

Funktionen und Relationen

Man hört oft die Meinung, der Funktionenbegriff ordne sich dem Mengenbegriff unter und es sei erst mengentheoretisch möglich, unter Benutzung der geordneten Paare den Funktionsbegriff in seiner vollen, von Dirichlet angestrebten Allgemeinheit zu präzisiern. Das ist so nicht richtig und diese Meinung erklärt auch nicht, warum eine rein mengentheoretische Definition des Funktionsbegriffs historisch gesehen erst relativ spät in der Mengenlehre Eingang fand. Vielmehr erwuchs diese Definition aus dem Bestreben, die Mengenlehre als universelles Fundament der Mathematik zu etablieren. Inzwischen sind Funktionen als Mengen geordneter Paare allerdings auch innerhalb der Mengenlehre zu einem unentbehrlichen Werkzeug geworden. Nicht zuletzt deswegen behandeln wir hier Funktionen vor den Relationen. Im Mittelpunkt stehen der Satz von Cantor über die Nichtäquivalenz einer Menge mit ihrer Potenzmenge, und der Cantor–Bernstein'sche Äquivalenzsatz. Letzteren formulieren wir in voller Allgemeinheit für Klassen.

Wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Anwendungen werden abzählbare und einige wichtige überabzählbare Mengen schon in diesem Kapitel betrachtet. In **3.5** werden die partiellen und totalen Ordnungen behandelt, sowie die Wohlordnungen, die für das „Zählen" unendlicher Mengen unentbehrlich sind.

In **3.6** treffen wir alle Vorbereitungen im Hinblick auf die Beweise des Wohlordnungssatzes und anderer Maximalprinzipien in Kapitel **4**, wobei wir methodisch etwas anders vorgehen als in traditionellen Lehrbüchern. Es wird überwiegend mit Fixpunktsätzen gearbeitet. Im Mittelpunkt steht eine AC–freie Konstruktion von Ketten (Theorem 1 in **3.6**), die einen Extrakt klassischer Beweise der erwähnten Sätze darstellt und sehr anwendungsfähig ist.

3.1 Funktionen

Intuitiv ist eine Funktion f einer Menge a in eine Menge b eine Vorschrift, nach der jedem $x \in a$ eindeutig ein $y \in b$ zugeordnet wird. Von dieser verlangen wir nur, daß sie definit ist, d.h. durch eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert wird, so daß beweisbar ist

$$(\forall x \in a)(\exists! y \in b)\varphi(x, y).$$

Genau dies ist die Art und Weise, in der man Funktionen naiv zu definieren pflegt und dies hatte auch Dirichlet im Sinne, wenn man davon absieht, daß φ hier eine $\mathcal{L}_\in$–Formel, i.a. aber eine Formel einer beliebigen mathematischen Sprache ist. Das ist aber ein ganz und gar unwesentlicher Punkt.

Völlig analog stellt man sich unter einer binären Operation f von a nach b eine durch $\varphi(x, x', y)$ definierte Operation vor, so daß $(\forall x \in a)(\forall x' \in a)\exists! y\varphi(x, x', y)$ erfüllt ist. Hier ist wie oben von geordneten Paaren nicht die Rede. Die Reihenfolge der Argumente ist durch die Formel selbst gegeben; z.B. kann man sagen, x sei das linke und x' das rechte Argument. Diese Erklärung ist völlig ausreichend, wenn $\varphi(x, x', y)$ oder die Beschreibung dieser Formel konkret vorliegen. Hier liegt die Ursache, warum eine mengentheoretische Definition des geordneten Paares erst relativ spät, etwa 1921, in die Mengenlehre eingeführt wurde. Eine solche Definition ist im Grunde erst dann unabdingbar, wenn man z.B. von der Menge aller reellen Funktionen reden will. Mit diesem Werkzeug erklärt man Funktionen als Mengen dann wie folgt.

Definition. Eine Menge f heißt *Funktion*, wenn f eine Menge von geordneten Paaren ist so daß $(x, y) \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y'$. Man nennt $\mathit{dom}\, f := \{x \mid \exists y (x, y) \in f\}$ den *Definitionsbereich* (*domain*) von f und $\mathit{im}\, f := \{y \mid \exists x (x, y) \in f\}$ das *Bild* oder die *Bildmenge* von f. Ist $a = \mathit{dom}\, f$ und $b \supseteq \mathit{im}\, f$, so heißt f eine Funktion von a *nach* (oder *in*) b, symbolisch $f : a \rightarrow b$. Es bezeichne $\mathcal{F}n$ die Klasse aller Funktionen.

Man überzeugt sich leicht, daß mit f auch $\mathit{dom}\, f$ und $\mathit{im}\, f$ tatsächlich Mengen sind. So ist z.B. $\mathit{dom}\, f = \{x \in \bigcup\bigcup f \mid \exists y\, (x, y) \in f\}$. Offenbar ist f immer Teilmenge von $\mathit{dom}\, f \times \mathit{im}\, f$. Das für $x \in \mathit{dom}\, f$ eindeutig bestimmte y mit $(x, y) \in f$ wird standardmäßig mit $f(x)$ bezeichnet, aber auch Bezeichnungen wie fx oder f_x oder x^f oder gar xf sind gebräuchlich. Ist $f : a \rightarrow b$ und $x \in a$, so gilt $f(x) = y \leftrightarrow (x, y) \in f$, so daß die Schreibweisen $f(x) = y$ und $(x, y) \in f$ gleichwertig sind.

Man beachte, daß die Schreibweise $f : a \rightarrow b$ ein etwas längliches dreistelliges Prädikat abkürzt. Auch sieht man sofort, mit $f : a \rightarrow b$ ist auch $f : a \rightarrow c$ für beliebiges $c \supseteq b$. Für $u \subseteq \mathit{dom}\, f$ heißt $f[u] := \{y \in \mathit{im}\, f \mid (\exists x \in u) f(x) = y\}$ auch das *Bild von u*.

Redeweisen wie 'es gibt ein f mit $f : a \to b$ und ...' kürzt man gelegentlich ab zu 'es gibt ein $f : a \to b$ mit ...', siehe etwa Übung 1. Dieser Sprachmißbrauch kann Mißverständnisse kaum verursachen.

Ganz ähnlich erklärt man mehrstellige Funktionen von a nach b, auch *Verknüpfungen* von a nach b genannt. So ist eine binäre Verknüpfung von a mit Werten in b eine Menge f mit $f : a \times a \to b$. Damit ist man imstande, z.B. den Begriff einer Gruppe mengentheoretisch zu definieren. Eine *Gruppe* ist ein Tripel (g, f, e) derart, daß $e \in g$ und $f : g \times g \to g$ und f die bekannten Eigenschaften einer Gruppenoperation mit dem neutralen Element e hat. Der Gruppenbegriff ist also eine definite Eigenschaft und es läßt sich von der Klasse aller Gruppen reden. Völlig analoges gilt für andere Strukturklassen, wie Ringe, topologische Räume, geometrische Räume usw.

Diese Tatsache mag grundlagentheoretisch befriedigend sein. Aber weder für die Gruppentheorie, noch für irgendeine andere mathematische Disziplin wird damit sachlich gesehen irgend etwas gewonnen. Immerhin kann man bei tiefergehenden Fragestellungen innerhalb einer Disziplinen auf Probleme stoßen, die mit gewissen Unabhängigkeitsresultaten über ZFC zusammenhängen. Dann muß man über die Grundlagen der betreffenden Disziplin sehr genau nachdenken.

Kehren wir zu den mengentheoretischen Funktionen zurück. Zunächst ist auch $\emptyset$ eine Funktion, die *leere Funktion*, denn $\emptyset$ ist die leere Menge von geordneten Paaren und die Definitionsbedingung ist trivial erfüllt. Es gilt $dom\,\emptyset = ran\,\emptyset = \emptyset$ und $\emptyset : \emptyset \to b$ für beliebiges b.

Offenbar ist mit $g \subseteq f \in \mathcal{F}n$ ist auch $g \in \mathcal{F}n$, d.h. $\mathcal{F}n$ ist unter Teilmengenbildung abgeschlossen. Für $f : a \to b$ und $u \in \mathcal{V}$ bezeichne $g := f\restriction u := \{(x, y) \in f \mid x \in u\}$ die *Einschränkung* von f auf u. Offenbar ist $g \subseteq f$. Daher heißt f auch *Fortsetzung* oder *Erweiterung* der Funktion g.

Es ist vorteilhaft, für eine beliebige Klasse $\mathcal{C}$ zu erklären $dom\,\mathcal{C} := \{x \mid \exists y (x, y) \in \mathcal{C}\}$. Ist $\mathcal{C}$ eine Menge, so stets auch $dom\,\mathcal{C}$, weil $dom\,\mathcal{C} \subseteq \bigcup\bigcup\mathcal{C}$, so daß $dom\,C$ zugleich ein auf dem gesamten Unviversum erklärter Operator ist. Es ist ferner von Vorteil, eine durch $\varphi(x, y)$ definierte Abbildung $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (siehe **2.5**) mit der Klasse $\{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}$ zu identifizieren und alle für Funktionen erklärten Definitionen und Redeweisen sinngemäß auch auf Abbildungen und auf ganz $\mathcal{V}$ erklärte Operatoren zu übertragen. So läßt sich z.B. $F\restriction a$ $(\in \mathcal{F}n)$ definieren als $\{(x, y) \mid (\exists x \in a) \exists y\, F(x) = y\}$. Diese Einschränkung einer Abbildung ist nach AR stets eine Menge. Man beachte, daß eine Klasse $\mathcal{F}$ geordneter Paare gemäß AR immer schon dann eine Funktion ist, wenn nur $\forall x\, \exists^{\leqslant 1} y (x, y) \in \mathcal{F}$ und $dom\,\mathcal{F}$ Menge ist.

Wir schreiben $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ für $f : a \to b \wedge (\forall x \in a)(\forall x' \in a)(f(x) = f(x') \to x = x')$ und sagen, f ist *injektiv* von a nach b. So ist z.B. $f : a \xrightarrow{\text{inj}} \mathfrak{P}(a)$ mit $f(x) = \{x\}$ (d.h. $f = \{(x, \{x\}) \mid x \in a\}$). Für $f(x) = \{x\}$ darf wie üblich auch $f : x \mapsto \{x\}$ geschrieben werden und analog für andere „Term-definierte" Funktionen.

Für $f : a \to b \wedge im\, f = b$, schreiben wir meistens $f : a \xrightarrow{\text{sur}} b$ und sagen f ist Funktion von a *auf* b, oder f ist *surjektiv* nach b. Schließlich stehe $f : a \leftrightarrow b$ für

$$f : a \xrightarrow{\text{inj}} b \;\wedge\; f : a \xrightarrow{\text{sur}} b.$$

Man sagt dann, f sei *bijektiv* von a auf b, oder f sei eine *Bijektion* von a auf b. Ein Beispiel ist die *identische Funktion* $f : a \leftrightarrow a$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in a$. Man beachte, eine Funktion f als Objekt der Mengentheorie ist nicht von Natur aus surjektiv oder bijektiv, sondern immer nur bezüglich b, falls $f : a \to b$.

Bijektionen ermöglichen es uns, Mengen ihrem Umfang nach miteinander zu vergleichen. Daher präsentieren wir bereits an dieser Stelle folgende

Definition. a und b heißen *äquivalent* oder *gleichmächtig*, wenn ein $f \in \mathcal{F}n$ mit $f : a \leftrightarrow b$ existiert, symbolisch $a \sim b$.

Offensichtlich gelten $a \sim a$ und $a \sim b \to b \sim a$, sowie $a \sim b \sim c \to a \sim c$, für alle Mengen a, b, c. Mit einigen weiteren einfachen Eigenschaften von $\sim$ befassen sich vorerst einige Übungen. Für eine endliche Menge a ist mit $a \sim b$ auch b endlich, weil das Bild einer endlichen Menge unter einem beliebigen Operator nach Übung 2 in **2.6** wieder endlich ist.

Ist f injektiv, so sei $f^{-1} =_{df} \{(b, a) \mid (a, b) \in f\}$. Dann ist auch $f^{-1} \in \mathcal{F}n$ und selbst wieder injektiv. f^{-1} heißt die *Inverse* von f.

Mit ${}^a b$ bezeichnet man die Menge aller Funktionen f mit $f \subseteq a \times b$. Offenbar gilt ${}^a\emptyset = \emptyset$ für $a \neq \emptyset$, sowie ${}^\emptyset b = 1\ (= \{\emptyset\})$. Die Menge ${}^a 2$ mit $2 = \{0, 1\}$ steht in enger Beziehung zu den Teilmengen von a. Ist $u \subseteq a$, erklärt man die *charakteristische Funktion* $\chi^a_u \in {}^a 2$ durch $\chi^a_u(x) = 1$ für $x \in u$ und $\chi^a_u(x) = 0$ sonst. Es ist plausibel, daß eine natürliche Bijektion zwischen $\mathfrak{P}(a)$ und ${}^a 2$ besteht (Übung 4).

Sind f, g Funktionen und ist $im\, g \subseteq dom\, f$, so erklärt man das *Produkt* $h = f \cdot g$ durch $h(x) = f(g(x))$ für alle $x \in dom\, g$. Sind für $f, g, h \in \mathcal{F}n$ die Produkte $f \cdot g$, $g \cdot h$ erklärt, beweist man leicht folgende Gleichung, in der dann auch alle vorkommenden Produkte wohlerklärt sind:

$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h.$$

Man beachte, daß für $f, g \in {}^a a$ das Produkt $f \cdot g$ stets erklärt ist. Die Teilmenge S_a aller $f \in {}^a a$ mit $f : a \leftrightarrow a$ bildet bezüglich $\cdot$ eine Gruppe mit dem neutralen Element id_a, die *Permutationsgruppe* von a.

Sind a und I Mengen, so heißt eine Funktion $f : I \to a$ auch eine *Familie von Elementen aus* a – hier darf man sich aussuchen, ob mit Familie die Funktion f oder das Tripel (f, I, a) gemeint ist. $f(i)$ wird oft mit a_i oder ähnlich bezeichnet. I heißt die *Indexmenge* dieser zuweilen auch mit $(a_i)_{i \in I}$ bezeichneten Familie, im Unterschied zum Bild $\{a_i \mid i \in I\}$. Man erklärt für $\bigcup$ (analog für $\bigcap$)

$$\bigcup_{i \in I} a_i := \bigcup \{a_i \mid i \in I\}.$$

Manche Rechengesetze sind in dieser Notation etwas einprägsamer, z.B. gilt

$$(\bigcup_{i \in I} a_i) \cap b = \bigcup_{i \in I} (a_i \cap b),$$

$$\bigcup_{i \in I} a_i \cap \bigcup_{j \in J} b_j = \bigcup_{i \in I, j \in J} (a_i \cap b_j) \ (:= \textstyle\bigcup_{i \in I}(\bigcup_{j \in J} a_i \cap b_j)).$$

Diese und ähnliche Notationen erklären sich in der Regel selbst. Übrigens gilt die letztgenannte Formel auch, wenn I, J beliebige Klassen bezeichnen.

Übungen

1. Sei $f : a \to b$. Zeige $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ genau dann, wenn es ein $f' : b \to a$ gibt mit $f' \cdot f = id_a$.

2. Beweise mit AC: $f \xrightarrow{\text{sur}} b$ dann und nur dann, wenn ein $f' : b \to a$ existiert mit $f \cdot f' = id_b$.

3. Sei $f : a \to b$. Zeige, $f : a \leftrightarrow b$ genau dann, wenn $f' \cdot f = id_a$ und $f \cdot f' = id_b$ für eine gewisse Funktion f'.

4. Man beweise $a \times b \sim b \times a$ und $a \times (b \times c) \sim (a \times b) \times c$.

5. Sei $a \sim a'$. Man beweise $a \times b \sim a' \times b$ und ${}^a b \sim {}^{a'} b$.

6. Man beweise ${}^c(a \times b) \sim {}^c a \times {}^c b$.

   Hinweis. Sei $f \in {}^c(a \times b)$ und $f(x) = (y, z)$. Betrachte das geordnete Paar aus den Funktionen $f_a : x \mapsto y$ und $f_b : x \mapsto z$ aus ${}^c a$ bzw. ${}^c b$.

7. Sei $n \in \omega$. Ist $f : n \xrightarrow{\text{sur}} a$, heißt f eine endliche Abzählung von a. a heiße *endlich abzählbar*, wenn $f : n \to a$ für gewisses $n \in \omega$. Gilt darüberhinaus $f : n \leftrightarrow a$, spricht man von einer *Abzählung ohne Wiederholung,* kurz eine *Aufzählung* von a genannt. Man beweise die Gleichwertigkeit von
   (i) a ist endlich,
   (ii) $a \sim n$ für ein $n \in \omega$,
   (iii) a ist endlich abzählbar, d.h. $f : n \xrightarrow{\text{sur}} a$ für ein $n \in \omega$.

8. Sei a endlich und $f : a \xrightarrow{\text{inj}} a$. Man zeige $f : a \leftrightarrow b$. Mit anderen Worten, es gibt keine echte Teilmenge $b \subset a$ mit $a \sim b$.

   Hinweis. Nach Satz 2.6.1 genügt zu zeigen: Hat a diese Eigenschaft und ist $e \notin a$, so hat auch $a \cup \{e\}$ diese Eigenschaft.

9. Beweise mit den Übungen 7 und 8: Zu jeder endlichen Menge a existiert genau ein $n \in \omega$ mit $a \sim n$, symbolisch $n = |a|$.

10. Eine Funktion f mit $dom\, f = \omega$ heißt auch eine *ω–Folge*. Man zeige mit AF (indirekt), es gibt keine ω–Folge f mit $f(n+1) \in f(n)$ für alle $n \in \omega$. Kurz, ist $f(n) = a_n$, so kann nicht gelten $\ldots \in a_2 \in a_1 \in a_0$.

11. $K \subseteq \mathcal{F}n$ heißt *Funktionenkette*, wenn $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$ für alle $f, g \in K$. Man zeige $h := \bigcup K$ ist Funktion mit $dom\, h = \bigcup\{dom f \mid f \in K\}$.

12. Sei $f : \mathfrak{P}(a) \to {}^a2$ erklärt durch $f(u) = \chi_u^a$ für $u \leqslant a$. Beweise $f : \mathfrak{P}(u) \leftrightarrow {}^a2$.

13. Eine Funktion ζ mit $dom\, \zeta = \mathfrak{P}(a)$ heißt eine *Auswahlfunktion für* $\mathfrak{P}(a)$, wenn $u \in u$ für alle $u \in \mathfrak{P}(a)$. Zeige ohne AC: Ist a abzählbar, so existiert eine Auswahlfunktion für $\mathfrak{P}(a)$.

    Hinweis. $a \sim n$ für ein $n \in \omega$ oder aber $a \sim \omega$. Wähle das kleinste Element.

14. In der Algebra und anderswo ist man oft genötigt, zu gegebenen Mengen a, b ein $a' \sim a$ anzugeben mit $a' \cap a = \emptyset = a' \cap b$. Sei $z \notin \bigcup(a \cup b)$. Man zeige, daß $a' = \{\{x, z\} \mid x \in a\}$ das Verlangte leistet.

3.2 Relationen

Ähnlich wie Abbildungen sind Relationen ihrem Ursprung nach nichts weiter als sprachliche Ausdrücke wohldefinierte Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge oder Klasse. Man redet z.B. in der $\in$–Relation oder der Inklusionsrelation $\subseteq$ auf dem Mengenuniversum $\mathcal{V}$. Diese sind definiert durch die besonders einfachen mengentheoretischen Formeln $x \in y$ bzw. $x \subseteq y$. Jede Formel $\varphi(x, y)$ beschreibt in diesem Sinne eine Relation auf dem Mengenuniversum.

In der Mathematik treten Relationen (z.B. die $<$–Relation zwischen reellen Zahlen) meistens als Beziehungen zwischen den Elementen konkreter Mengen auf. Will man über die Menge der Relationen auf den reellen Zahlen reden, dann ist es erforderlich, Relationen ähnlich wie Funktionen durch interne Objekte, also Mengen zu modellieren, und das kann leicht geschehen, indem man eine Relation auf einer Menge mit der Menge der ihr entsprechenden geordneten Paare identifiziert. [1)] Dies motiviert die folgende

Definition. Eine Relation *auf* einer Menge a ist eine Teilmenge $r \subseteq a \times a$. Eine Relation schlechthin ist eine Menge r geordneter Paare.

Definiert man $\operatorname{fld} r = \bigcup\bigcup r$ (das *Feld* der Relation r), sieht man sofort $r \subseteq a \times a$ mit $a = \operatorname{fld} r$. Also ist jede Relation eine solche auf ihrem Feld, aber natürlich auch auf jeder Menge b mit $b \subseteq \operatorname{fld} r$. $\mathcal{Rel}$ bezeichne die Klasse aller Relationen. Offenbar ist $\mathcal{Fn} \subseteq \mathcal{Rel}$. Genau wie $\mathcal{Fn}$ ist auch $\mathcal{Rel}$ abgeschlossen gegenüber Teilmengen, d.h. $q \subseteq r \in \mathcal{Rel} \rightarrow q \in \mathcal{Rel}$.

Statt $(x, y) \in r$ schreibt man meistens $x\, r\, y$, vor allem dann, wenn r ein allgemein gebräuchliches Symbol wie $<$ oder $\leqslant$ bezeichnet. Natürliche Beispiele für Relationen auf einer Menge a sind die *Identitätsrelation* $\{(x, x) \mid x \in a\}$, die *Epsilon–Relation* $\in_a = \{(x, y) \in a \times a \mid x \in y\}$ und die *Inklusionsrelation* $\subseteq_a = \{(x, y) \in a \times a \mid x \subseteq y\}$.

Zuweilen bezeichnet man Relationen im obigen Sinne auch als *binäre* Relationen und nennt Mengen von n–tupeln dann *n–stellige* Relationen. Auch spricht man gelegentlich von Relationen zwischen a und b und meint damit Teilmengen $r \subseteq a \times b$. Das ist aber nur scheinbar allgemeiner, denn es ist $r \subseteq c \times c$ mit $c = a \cup b$.

Allerdings muß man, jedenfalls in einer Situation wie der unsrigen, zwischen Relationen als Mengen von geordneten Paaren und Relationen auf dem Universum $\mathcal{V}$

[1)] Russell, der (1912) diese Methode nicht kannte, schuf als Ersatz eine „verzweigte“ Typentheorie in den Principia Mathematica.

unterscheiden. Eine durch $\varphi(x,y)$ definierte Relation auf $\mathcal{V}$ kann immer auch mit der Klasse $\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}$ identifiziert werden. Daher redet man besser von einem *zweistelligen Prädikat* statt von einer Relation. Man könnte z.B. auch von *internen* und *externen* oder von *lokalen* und *globalen* Relationen reden. In all diesen Dingen gibt es keine verbindliche Regelung des Sprachgebrauchs und häufig läßt nur der Kontext erkennen, ob eine Relation als Menge oder Klasse verstanden werden soll. Denn so wie Operatoren ähnliche Eigenschaften haben wie Funktionen, verhalten sich auch relationale Prädikate ähnlich wie Relationen auf Mengen.

Jedenfalls läßt sich immer reden von der Menge aller Relationen auf einer Menge a. Es ist dies einfach $\mathfrak{P}(a \times a)$.

Ist R ein durch $\varphi(x,y)$ definiertes Prädikat und a eine Menge, so gibt es genau eine Relation $r \subseteq a \times a$ derart, daß $\forall xy(x\,r\,y \leftrightarrow x\,R\,y)$, nämlich $\{(x,y) \in a \times a \mid x\,\mathcal{R}\,y\}$. Man kann dies das *Komprehensionsprinzip* für Relationen nennen.

Es gibt zwei Arten von Relationen, die uns im mathematischen Alltag ständig begegnen, nämlich die Äquivalenzrelationen und die partiellen und totalen Ordnungsrelationen. Der Rest dieses Abschnittes befaßt sich nur mit den ersteren.

Allgemein heißt $\approx\ \subseteq a \times a$ eine *Äquivalenzrelation auf* a, wenn für alle $x, y, z \in a$:

(a) $x \approx x$ ($\approx$ ist *reflexiv*),

(b) $x \approx y \to y \approx x$ ($\approx$ ist *symmetrisch)*,

(c) $x \approx y \approx z \to x \approx z$ ($\approx$ ist *transitiv*).

Sei $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf a und $x \in a$. Dann heiße $k_\approx(x) = \{y \in a \mid y \approx x\}$ die durch x bestimmte *Äquivalenzklasse*, obwohl es sich hier natürlich um eine Menge handelt und $k_\approx$ eine wohlbestimmte Funktion von a nach $\mathfrak{P}(a)$ ist, die *kanonische Funktion* zu $\approx$. Aber es gibt auch „Äquivalenzprädikate" auf Klassen oder auf ganz $\mathcal{V}$, z.B. das Gleichmächtigkeitsprädikat $\sim$. Hier trifft die traditionelle Bezeichnung Äquivalenz*klasse* sozusagen ins Schwarze.

Durchschnitt und Vereinigungen von Äquivalenzrelationen auf a sind offenbar wieder Äquivalenzrelationen auf a. Es gibt eine kleinste Äquivalenzrelation auf a, die Identitätsrelation, und eine größte, nämlich $a \times a$.

Eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf a erzeugt eine *Partition* von a. Darunter versteht man allgemein ein System p paarweise disjunkter nichtleerer Teilmengen von a derart, daß $\bigcup p = a$. Im vorliegenden Falle ist $p := \{k_\approx(x) \mid x \in a\}$ die von $\approx$ induzierte oder zu $\approx$ *gehörige* Partition von a. Daß p wirklich Partition ist, folgt unmittelbar aus den für $x, y \in a$ leicht beweisbaren Eigenschaften

(a) $x \in k_{\approx}(x)$, (b) $x \approx y \leftrightarrow k_{\approx}(x) = k_{\approx}(y)$, (c) $x \not\approx y \to k_{\approx}(x) \cap k_{\approx}(y) = \emptyset$.

Umgekehrt rührt jede Partition von a von einer Äquivalenzrelation her und es existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Äquivalenzrelationen auf a und den Partitionen von a (Übung 2). Ferner gibt es eine einfache aber nützliche, in der Mathematik überall verwendete Beziehung zwischen Partitionen von a und auf a definierten Funktionen. Ein f mit $dom\, f = a$ erzeugt offenbar eine Äquivalenzrelation $\approx_f$ auf a mit $x \approx y \leftrightarrow f(x) = f(y)$. Sei p Dann läßt f sich in einer speziellen Weise „faktorisieren“:

Sei $f : a \xrightarrow{sur} b$, $k = k_{\approx}$ die kanonische Funktion zu $\approx_f$ und $p := p_f$ die von $\approx_f$ induzierte Partition von a. Dann existiert eine Bijektion $g : p \leftrightarrow b$ mit $f = g \cdot k$.

In der Tat, sei $g := \{(k(x), f(x)) \mid x \in a\}$, oder etwas lapidar, $g(k(x)) = f(x)$. g ist Funktion (oder „korrekt definiert“, wie man zu sagen pflegt), und außerdem injektiv. Dies folgt sofort aus $k(x) = k(x') \leftrightarrow f(x) = f(x')$ für $x, x' \in a$, und letzteres ist offensichtlich. Schließlich gilt auch $f = g \cdot k$ nach Definition von g. Es ist nützlich, sich den eben bewiesenen Sachverhalt anhand eines Diagrammes einzuprägen:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f", "\text{sur}"'] \arrow[dr, "\text{sur}", "k"'] & & b \\ & p \arrow[ur, "\text{bij}", "g"'] & \end{tikzcd}$$

Übungen

1. $\approx\ \subseteq a \times a$ heiße *euklidisch*, wenn $(\forall xyz \in a)((x \approx y \wedge x \approx z) \to y \approx z)$. Man zeige, folgende Eigenschaften sind gleichwertig:

   (i) $\approx$ ist Äquivalenzrelation auf a, (ii) $\approx$ ist reflexiv und euklidisch.

2. Sei η die Menge aller Äquivalenzrelationen $\approx\ \subseteq a \times a$ für festes a, und π die Menge aller Partitionen von a. Ferner sei $p{\approx}$ die von $\approx$ induzierte Partition. Man zeige $f : \eta \leftrightarrow \pi$, wobei $f(\approx) = p{\approx}$.

3. Ein Paar (a, r) mit $r \subseteq a \times a$ heiße eine *Struktur*. Seien $A = (a, r)$, $B = (b, s)$ Strukturen. f heiße ein *Isomorphismus* von A auf B, symbolisch $f : A \simeq B$, wenn $f : a \leftrightarrow b \wedge (\forall x, y \in a)(x\, r\, y \leftrightarrow f(x) s\, f(y))$. Falls ein solches f existiert, schreibt man $A \simeq B$ und sagt, A, B seien isomorph. Man zeige, $\simeq$ ist ein Äquivalenzprädikat auf der Klasse aller Strukturen, d.h $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

3.3 Der Satz von Cantor

Es handelt sich hier um den Satz 3.1 unten, zu dem Cantor verständlicherweise erst nach mancherlei Umwegen gelangte. Dieser Satz ist von fundamentaler Bedeutung.

Übung 9 in **3.1** zeigt, zu jeder endlichen Menge a existiert genau ein $n \in \omega$ mit $a \sim n$. Dieses n heißt die *Anzahl* oder *Kardinalzahl* von a, symbolisch $n = |a|$. Später werden auch den unendlichen Mengen a Mächtigkeitsmaße (Kardinalzahlen) zugeordnet. Vorerst betrachten wir nur die folgende sehr anschauliche Relation des Mächtigkeitsvergleichs:

Definition. $a \precsim b \leftrightarrow_{df} \exists f\, f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ (a ist höchstens so mächtig wie b). Falls $a \precsim b$ aber nicht $a \sim b$, heißt b *mächtiger* als a, symbolisch $a \prec b$.

Offenbar gilt $a \precsim b \precsim c \rightarrow a \precsim c$. Man beachte ferner $a \subseteq b \rightarrow a \precsim b$, denn $id_a : a \xrightarrow{\text{inj}} b$.

Nach Definition ist $a \prec b$ genau dann, wenn zwar eine Injektion, aber keine Bijektion von a nach b existiert. Offenbar ist $a' \prec b'$, falls $a' \sim a$, $b' \sim b$ und $a \prec b$. Auch gilt sicher $a \not\prec a$. Dagegen ergibt sich eine merkwürdige Schwierigkeit für den Beweis der Behauptung

$$(*) \quad a \prec b \prec c \rightarrow a \prec c$$

obwohl man geneigt ist, $(*)$ ungeprüft zu akzeptieren. Tatsächlich ist $(*)$ richtig und zwar unabhängig von AC, aber erst als Folge des im nächsten Abschnitt bewiesenen Äquivalenzsatzes. Um den Fluß der Dinge nicht zu unterbrechen, benutzen wir $(*)$ bereits jetzt. In Kapitel 4 beweisen wir mit AC außerdem

$$a \prec b \vee a = b \vee b \prec a.$$

Für endliche a, b geht das jedoch ohne AC wie folgt. Es genügt offenbar zu wissen, daß $n \prec m \vee n = m \vee n \prec n$ für alle $n, m \in \omega$. Das aber folgt unmittelbar aus

$$\begin{array}{ll} (1) & m \in n \vee m = n \vee n \in m \\ (2) & m \in n \leftrightarrow m \prec n \end{array} \quad (m, n \in \omega).$$

Dabei ist (1) klar, weil ω nach Satz 2.6 $\in$-geordnet ist. (2) ergibt sich wie folgt: Ist $m \in n$, so $m \subset n$ (m ist transitiv und sicher $m \neq n$). Nach Übung 8 in 3.1 kann $m \sim n$ für die echte Teilmenge m von n aber nicht gelten, also $m \prec n$. Sei umgekehrt $m \prec n$, so daß sicher $m \neq n$. Wäre $m \notin n$, folgt mit (1) $n \in m$, also $n \prec m$ nach dem eben Bewiesenen, was wegen $m \prec n$ nach $(*)$ den Widerspruch $n \prec n$ ergibt. Also muß $m \in n$ gelten. Man darf sich unter $n < m$ demnach wahlweise $n \in m$ oder $n \subset m$

oder auch $n \prec m$ vorstellen.

$f : a \to \mathfrak{P}(a)$ mit $f(x) = \{x\}$ ist injektiv, also gilt gewiß $a \precsim \mathfrak{P}(a)$. Weil man bei unendlichen Mengen aber auf mancherlei Überraschungen gefaßt ist, läßt $a \sim \mathfrak{P}(a)$ sich nicht von vornherein ausschließen. Selbst für endliche Mengen a ist $a \prec \mathfrak{P}(a)$ keineswegs selbstverständlich. Dies folgt erst daraus, daß mit a auch $\mathfrak{P}(a)$ endlich ist und daß eine endliche Menge mit einer echten Teilmenge nicht äquivalent sein kann. Diese Nachweise kosten Arbeit. Um so überraschender ist die Einfachheit des Beweises von Satz 3.1. Ähnlich wie bei der Russell'schen Antinomie werden beim Beweis die Möglichkeiten logischer Argumentation hart ausgeschöpft.

Satz 3.1. $a \prec \mathfrak{P}(a)$ *für alle* a.

Beweis. Wir zeigen etwas stärker, daß keine Surjektion von a auf $\mathfrak{P}(a)$ existiert. Sei $f : a \to \mathfrak{P}(a)$ beliebig und $b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$. Es genügt zu zeigen $b \notin im\, b$. Angenommen $b = f(z)$ für ein $z \in a$. Ist $z \in b = f(z)$, so $z \notin f(z)$ nach Definition von b. Das ist ein Widerspruch. Ist $z \notin b$, so ist $z \in f(z)$ nach Definition von b, also doch $z \in b$ – auch ein Widerspruch. Also $b \notin ran\ f$ und damit ist f nicht surjektiv. ❑

Unter den unendlichen Mengen sind besonders ausgezeichnet die abzählbaren. Eine Menge a heiße *abzählbar*, wenn $a \precsim \omega$, und andernfalls *überabzählbar*. Der Definition entnimmt man unmittelbar, daß alle endlichen Mengen abzählbar sind und daß mit abzählbarem a auch jede Teilmenge von a abzählbar ist. Man zeigt unschwer, daß a genau dann abzählbar ist, wenn a leer ist oder wenn eine Surjektion $f : \omega \xrightarrow{\text{sur}} a$ existiert (Übung). Ein solches f heißt dann auch *Abzählung* von a. Ist $a \precsim b$, so ist mit a offenbar auch b überabzählbar.

Speziell gilt $\omega \prec \mathfrak{P}(\omega)$ nach Satz 3.1. $\mathfrak{P}(\omega)$ ist das Paradebeispiel einer überabzählbaren Menge. Denn die Annahme der Abzählbarkeit, also $\mathfrak{P}(\omega) \precsim \omega$, impliziert den Widerspruch $\mathfrak{P}(\omega) \prec \mathfrak{P}(\omega)$. Weil $\mathfrak{P}(\omega) \sim {}^{\omega}2$ nach Übung 12 in **3.1**, gibt es also auch überabzählbar viele Funktionen $f : \omega \to 2$, also erst recht überabzählbar viele $f : \omega \to \omega$. Tatsächlich sind aber alle drei zuletzt genannten Mengen gleichmächtig, wie im nächsten Abschnitt recht einfach bewiesen werden kann. Alle diese Mengen haben dieselbe Mächtigkeit wie die Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen.

Man kann die Frage stellen, wie konnte Cantor obigen Satz beweisen, wenn doch erst nach 1920 Funktionen via geordnete Paare als mengentheoretische Objekte zu betrachten begann, während der angegebene Beweis den Funktionsbegriff doch wesentlich benutzt. Um dies zu beantworten, erinnern wir an die Tatsache, daß Cantor und auch Zermelo Funktionen als naive Hilfsmittel verwendeten und gar nicht beabsichtigten, diese als Objekte der Mengenlehre aufzufassen und zu untersuchen. Sei

$\varphi(x,y)$ eine Formel derart, daß $(*)$ $(\forall x\in a)(\exists! y\in b)\varphi(x,y)$ beweisbar ist. Durch $(*)$ ist eine partiell definierte Abbildung gegeben, die getrost mit der sie definierenden Formel identifiziert werden kann, solange man ihr keine Bezeichnung erteilt.

Wenn man einmal davon absieht, daß praktisch erst nach 1900 damit begonnen wurde, mathematische Theorien zu formalisieren, und wenn man statt Formel einfach „sinnvoller sprachlicher Ausdruck in den Variablen x, y“ sagt, dann sind Abbildungen im obigen Sinne genau das, womit Cantor, Zermelo u.a. naiv operierten. Genauso verfahren die Mathematiker übrigens auch heute, solange sie nicht spezielle mengentheoretische Zielsetzungen verfolgen.

Ignorieren wir für den Moment unser Wissen über geordnete Paare und die Definition von Funktion in Abschnitt **3.1**, dann zeigt Satz 3.1 die Richtigkeit von

$(*)$ *Es gibt keine surjektive Abbildung* $F : a \mapsto \mathfrak{P}(a)$.

Denn obiger Beweis läßt sich für ein durch $\varphi(x,y)$ definiertes F fast wörtlich wiederholen. Auch jetzt verläuft der Beweis im Prinzip gänzlich in $\mathcal{L}_\in$; so daß z.B. der Ausdruck $x\notin F(x)$ einfach die Bedeutung von $\neg\varphi(x,x)$ hat. Zwar besitzt $(*)$ genau genommen nur einen metatheoretischen Charakter, aber das ist nebensächlich, jedenfalls solange man nur „naive“ Mengenlehre zu betreiben wünscht.

Man könnte nun denken, daß $(*)$ doch etwas weniger besagt, weil ja Funktionen $f : a \to \mathfrak{P}(a)$ nahezu beliebige Teilmengen von $a \times \mathfrak{P}(a)$ sind. Wir hatten eine direkte Folge aus Satz 3.1 schon erwähnt, wonach es überabzählbar viele Funktionen $f : \omega \to 2$ gibt. Andererseits sind definierte Abbildungen $F : \omega \to 2$ durch Formeln beschreibbar und es gibt sicher nur abzählbar viele Formeln.

Wie erklärt sich diese scheinbare Paradoxie? Zunächst ist klar, daß einer durch $\varphi(x,y)$ definierten Abbildung $F : a \to b$ in natürlicher Weise eine mengentheoretische Funktion entspricht, nämlich $f = \{(x,y) \mid x\in a \land \varphi(x,y)\}$. Auch umgekehrt entspricht jeder Funktion $f : a \to b$ eine Abbildung $F : a \to b$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x\in a$. Und zwar wird F definiert durch die Formel

$$\varphi(x,y) = f : a \to b \land (x,y)\in f.$$

Denn es ist sowohl $(\forall x\in a)(\exists! y\in b)\varphi(x,y)$ als auch $(\forall x\in a) f(x) = F(x)$ leicht beweisbar. Die Erklärung der Paradoxie liegt einfach darin, daß eine Feststellung wie „Es gibt nur abzählbar viele Formeln“ kein Satz der Theorie ist. Ganz unabhängig davon kann man auch mit dieser Paradoxie ganz gut leben. In der Theorie wird zwar bewiesen, es gibt überabzählbar viele Funktionen $f : \omega \to 2$, aber sobald wir ein solches f beim Namen nennen, wird es sogleich von einer wohldefinierten Abbildung

F „eingeholt". Etwas poetisch läßt sich die Situation auch wie folgt beschreiben: Die Bewohner von ZFC glauben, sie hätten überabzählbar viele Funktionen $f:\omega \to 2$. Aber die von oben auf ZFC blickenden Götter wissen, dies ist nur deren Glaube.

Man darf sich dennoch nicht täuschen. Denn letztlich sind wir auch auf der Metaebene die Untergebenen von ZFC. Auch Sätze über ZFC werden auf einer höheren Ebene wieder zu Sätzen *in* ZFC. Beweisbarkeit in ZFC ist jedenfalls für die harte Mathematik bislang das ultimative Wahrheitskriterium.

Übungen

1. Injektionen $p:\omega \times \omega \xrightarrow{\text{inj}} \omega$ heißen auch *Paarungsfunktionen* für ω. Man zeige, $p:\omega\times\omega \to \omega$ mit $p(n,m) = 2^n\cdot(2m+1)$ ist Paarungsfunktion[2)]. Also $\omega\times\omega \precsim \omega$.

2. Man zeige, ist $a \precsim \omega$ unendlich, so ist $a \sim \omega$.

   Hinweis. O.B.d.A. $a \subseteq \omega$. Zeige durch Induktion: Zu jedem $n \in \omega$ existiert genau ein ordnungstreues $f_n : n \xrightarrow{\text{inj}} a$, so daß $\mathit{im}\, f_n$ ein Anfang von a ist (d.h. $m < k \in \mathit{im}\, f \wedge m \in a \to m \in \mathit{im}\, f$) und $m \leqslant n \leftrightarrow f_m \subseteq f_n$. Für $f := \bigcup\{f_n \mid n \in \omega\}$ zeige man leicht $f:\omega \leftrightarrow a$. Nach AR ist $\{f_n \mid n \in \omega\}$ eine Menge. Die Konstruktion von f ist einfacher mit dem noch unbewiesenen ω-Rekursionssatz.

3. Man beweise $\omega \times \omega \sim \omega$ mit den Übungen 1 und 2. (Mit Satz 4.1 benötigt man für den Beweis nur $\omega \times \omega \precsim \omega$, weil gewiß $\omega \precsim \omega \times \omega$.)

4. Man zeige (ohne AC): Eine Menge a ist abzählbar genau dann, wenn $a = \emptyset$ oder eine Surjektion $f:\omega \xrightarrow{\text{sur}} a$ existiert.

   Hinweis. a ist endlich oder $a \sim \omega$.

5. Zeige, mit allen a_i ist auch $a = \bigcup\{a_i \mid i \in \omega\}$ abzählbar. Kurzum, die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

   Hinweis. O.B.d.A. $a_i \neq \emptyset$. Man wähle für jedes $i \in \omega$ mit AC ein $f_i : \omega \xrightarrow{\text{sur}} a_i$. Dann ist $f:\omega \times \omega \xrightarrow{\text{sur}} a$ mit $f(i,j) = f_i(j)$. Beachte $\omega \times \omega \sim \omega$.

[2)] Eine häufig verwendete Paarungsfunktion ist $p(n,m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$. Für diese gilt sogar $\mathit{im}\, p = \omega$. Eine arithmetisch einfache Paarungsfunktion für ω, die sich sogar zu einer solchen aller Ordinalzahlen erweitern läßt, ist auch $p(n,m) = (n+m)\cdot(n+m+1)+n$. Alle diese Beispiele benutzen die arithmetischen Operationen. Man kann jedoch auch ohne diese unschwer eine Paarungsfunktion konstruieren, siehe etwa den Beweis von Satz 6.1.4.

3.4 Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Dieser zuerst von Dedekind[3)] explizit formulierte, elegant bewiesene aber nicht publizierte Satz lautet wie folgt

Satz 4.1 (Äquivalenzsatz). *Ist* $a \precsim a'$ *und* $a' \precsim a$*, so* $a \sim a'$.

Daraus folgt insbesondere auch $a \prec b \prec c \to a \prec c$. Denn sei $a \prec b \prec c$, so daß gewiß $a \precsim c$. Wäre $a \sim c$, folgt $a \precsim b \precsim a$, also $a \sim b$ im Widerspruch zu $a \prec b$.

Auch folgende (außerhalb der Theorie formulierte) Anwendung deutet den Nutzen von Satz 4.1 an. Seien $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ die Mengen der natürlichen bzw. der rationalen Zahlen. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ist sicher $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$. Die Funktion $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ mit $F(\pm\frac{n}{m}) = 2^\sigma \cdot 3^n \cdot 5^m$ (n, m teilerfremd, $\sigma = 1$ falls $+\frac{n}{m}$ und $\sigma = 0$ falls $-\frac{n}{m}$ gemeint ist) ist offenbar injektiv. Also auch $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$. Folglich gilt $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{Q}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Der Beweis von Satz 4.1 benötigt nur sehr schwache axiomatische Annahmen. Insbesondere ist das Auswahlaxiom nicht involviert. In dem unten angegebenen hier erstmals publizierten Beweis werden auch weder das Unendlichkeitsaxiom noch das Potenzmengenaxiom benötigt. Zunächst aber folgen wir Dedekind's Bemerkung, wonach Satz 4.1 eine Folge ist von $(*)$ $b \subseteq a \precsim b \to a \sim b$. In der Tat, sei gemäß Prämisse von Satz 4.1 $f : a \xrightarrow{\text{inj}} a'$ und $g : a' \xrightarrow{\text{inj}} a$. Dann ist für $b := \mathit{ran}\ g$ und $h := g \cdot f$ gewiß $h : a \xrightarrow{\text{inj}} b$. Also $b \subseteq a \precsim b$ und nach $(*)$ damit $a \sim b$. Wegen $a' \sim b$ erhalten wir schließlich $a \sim a'$. Daher genügt für den Beweis von Satz 4.1 derjenige von

Satz 4.2. $b \subseteq a \precsim b \to a \sim b$.

Beweis. Sei $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ $(\subseteq a)$ und s das System aller $p \subseteq a$ mit den Eigenschaften

$$\text{(A) } f^{-1}[p] \subseteq p, \qquad \text{(B) } p \cap b \subseteq \mathit{ran}\ f.$$

Sei $u = \bigcup s$. Für $x \in a \setminus b$ ist $x \notin \mathit{im}\, f$. Daher gelten (A) und auch (B) offenbar für $p = \{x\}$, also $x \in u$. Das zeigt $a \setminus u \subseteq b$ und daher $g : a \to b$, wobei g erklärt sei durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in u, \\ x & \text{für } x \in a \setminus u. \end{cases}$$

Wir behaupten nun $g : a \leftrightarrow b$. Sei $x \in u$, etwa $x \in p \in s$. Man sieht leicht, daß (A), (B) auch für $p' = p \cup \{f(x)\}$ gelten. Also $f(x) \in u$. Das beweist (C) $f[u] \subseteq u$. Zuerst zeigen wir $g : a \xrightarrow{\text{inj}} b$. Sei $x \neq x'$. Sicher ist $g(x) \neq g(x')$ für $x, x' \in u$ oder $x, x' \in a \setminus u$; ist

[3)] R. Dedekind (1831–1916) notierte den Satz mit vollständigem Beweis in sein Tagebuch von 1887.

$x \in u$, $x' \in a \setminus u$, so ist $g(x) = f(x) \in u$ gemäß (C) und $g(x') = x' \in a \setminus u$; also $g(x) \neq g(x')$. Schließlich ist g such surjektiv. Denn sei $y \in b$. Für $y \notin u$ gehört $y = g(y)$ gewiß zu *im* g. Falls aber $y \in u$, etwa $y \in p \in s$, so ist wegen $y \in p \cap b$ auch $y \in$ *im* f gemäß (B). Sei etwa $y = f(x)$. (A) besagt $x \in p$, also $x \in u$. Damit gilt $g(x) = f(x) = y$, also $y \in$ *im* g auch in diesem Falle. ❑

Dieser Beweis bleibt ohne jede Änderung richtig, wenn a, b als Klassen verstanden werden und f eine injektive Abbildung von a in b ist. g ist dann eine bijektive Abbildung von a nach b. Wir haben in Wahrheit daher ein viel schärferes Resultat bewiesen, nämlich

Satz 4.1©. *Seien $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ Klassen und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine injektive Abbildung. Dann existiert eine Bijektion $G : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$. Ferner: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Klassen mit $\mathcal{A} \precsim \mathcal{A}' \precsim \mathcal{A}$, so gilt $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$.*

Hier sind $\precsim$ und $\sim$ für Klassen völlig analog definiert wie für Mengen. Der zweite Teil des Satzes ist dann eine direkte Folge des ersten, genau wie Satz 4.1 eine Folge ist von Satz 4.2.

Bemerkung. Die Aussage von Satz 4.1© hat einen konstruktiven Charakter (sonst könnten wir sie gar nicht formulieren), d.h. es läßt sich zu beliebigen Formeln, die injektive Abbildungen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}'$ bzw. von $\mathcal{A}'$ nach $\mathcal{A}$ beschreiben, eine Formel $\varphi(x, y)$ explizit angeben, die eine Bijektion zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ vermittelt. Für den Beweis von Satz 4.1© benötigt man bei genauerem Hinsehen lediglich Extensionalität und die Annahme, daß mit x, y auch $x \cup \{y\}$ Menge ist (Tarski's Fragment). Für denselben Beweis in der Theorie benötigt man natürlich etwas mehr. Er läßt sich aber z.B. ausführen in dem sehr schwachen System von Kripke–Platek.

Um die Konstruktion einer Bijektion $h : a \leftrightarrow b$ aus einer Injektion $f : a \to b$ besser zu verstehen, sei hier noch ein zweiter Beweis von Satz 4.2 angegeben. Dessen Grundidee ist, $f : a \to b$ zu einer Bijektion h zu „simplifizieren". Sei *fix* f die Menge der *Fixpunkte* einer Funktion f, d.h. *fix* $f := \{x \in \textit{dom}\, f \mid f(x) = x\}$. Für $f, g \in {}^a a$ sei $g \leqslant f$ (g ist *einfacher* als f), wenn *fix* $f \subseteq$ *fix* g und $f(x) = g(x)$ für alle $x \neq g(x)$. Kurz gesagt entsteht g aus f durch Vermehrung der Fixpunkte; aber dort, wo g etwas bewegt, soll g mit f übereinstimmen. g liegt in diesem Sinne näher an der Funktion id_a, der einfachsten Funktion aus ${}^a a$.

Es ist klar, daß $h \leqslant g \leqslant f \to h \leqslant f$ und $h \leqslant g \leqslant h \to h = g$. Mehr benötigt man nicht. Ist $b \subseteq a$ und $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$, so wird der folgende Beweis zeigen, daß die einfachste aller Funktionen $g \leqslant f$ mit *im* $g \subseteq b$ gerade eine Bijektion von a auf b darstellt.

Nebenbei bemerkt liefert der oben angegebene Beweis gerade diejenige unter allen Bijektionen $g \leqslant f$, welche die wenigsten Fixpunkte hat, dafür aber am nächsten bei f liegt.

Beweis II von Satz 4.2: Sei $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ und $\mathcal{J}$ die Klasse aller g, so daß $g : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ und $g \leqslant f$. Sei $h : a \to b$ erklärt durch

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in c := \bigcup_{g \in \mathcal{J}} \mathit{fix}\, g \ (\subseteq b), \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gewiß gilt (1) $h \leqslant g$ für alle $g \in \mathcal{J}$. Ferner ist $h : a \xrightarrow{\text{inj}} b$. Denn $x \neq x' \to h(x) \neq h(x')$ sicher für $x, x' \in c$ oder $x, x' \in a \setminus c$; falls aber $x \in c$, $x' \in a \setminus c$, so ist $h(x) = x = g(x)$ für ein $g \in \mathcal{J}$ sowie $x' \neq g(x') = f(x')$, also $h(x) = g(x) \neq g(x') = f(x') = h(x')$. Daher $h \in \mathcal{J}$. Es sei $h' \leqslant h$ erklärt durch $h'(x) = x$ für $x \in b \setminus \mathit{im}\, h$ und $h'(x) = h(x)$ sonst, so daß (2) $\mathit{ran}\ h \cap \mathit{fix}\, h' = \emptyset$. Das ergibt leicht, daß auch h' injektiv ist. Somit ist $h' \in \mathcal{J}$, gemäß (1) also $h \leqslant h'$ und daher $h' = h$, so daß wegen (2) dann $b \setminus \mathit{im}\, h \subseteq \mathit{fix}\, h$. Das aber ergibt $b = (b \setminus \mathit{im}\, h) \cup \mathit{im}\, h \subseteq \mathit{fix}\, h \cup \mathit{im}\, h = \mathit{im}\, h$. Also $b \subseteq \mathit{im}\, h$. Damit ist h in der Tat eine Bijektion von a auf b.

Wir wollen nun einige Beispiele für Anwendungen für Satz 4.1© angeben. Diese sind zwar nur von marginaler Bedeutung, aber sie sind nützlich und instruktiv für die bildliche Vorstellung über das Mengenuniversum $\mathcal{V}$.

(1) Gibt es „mehr“ oder „weniger“ oder „gleichviel“ endliche Mengen wie Mengen überhaupt? Letzteres ist richtig. Denn $F : \mathcal{V} \to \mathcal{F}\mathit{in}$ mit $F(x) = \{x\}$ ist injektiv und daher ist $\mathcal{F}\mathit{in} \sim \mathcal{V}$ gemäß Satz 4.1©. Dieses Argument zeigt zugleich, daß $\mathcal{V}$ mit jeder Klasse äquivalent ist, welche die Klasse $\mathcal{V}^{(1)}$ aller Einermengen enthält.

(2) $\mathcal{V}^{(a)} = \{x \mid x \sim a\}$ heißt die zu a gehörige *Mächtigkeitsklasse* von $\mathcal{V}$. Offenbar zerfällt $\mathcal{V}$ in paarweise disjunkte Mächtigkeitsklassen. $\mathcal{V}^{(1)}$ ist eine dieser Klassen. Es ist mit Satz 4.1© leicht beweisbar, daß $\mathcal{V}^{(a)} \sim \mathcal{V}^{(b)}$ für alle $a, b \neq \emptyset$. Dazu genügt zu zeigen, daß $\mathcal{V}^{(a)} \sim \mathcal{V}$ für alle $a \neq \emptyset$ (Übung 1).

Schon Beispiel 1 legt die Frage nahe, ob über ZF nicht sogar alle echten Klassen äquivalent sind. Dies wurde von Cantor vermutet [4)] und von Von Neumann (in seinem System) sogar als Axiom postuliert. Das Von Neumann'sche Axiom wird plausibel, wenn man sich vorstellt, $\mathcal{V}$ ließe sich mit dem unerschöpflichen Vorrat an Ordinalzahlen aufzählen. Will man diese Vorstellung in $\mathcal{L}_\in$ formulieren, muß diese Aufzählung natürlich definierbar sein, also irgendwie explizit angegeben werden. Diese Aufzählung induziert sofort eine Wohlordnung von $\mathcal{V}$ und man kann dann AC sogar beweisen. AC ist also eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz aller Klassen. Allerdings ist sie nicht hinreichend, so daß Beispiele wie (1) oder (2) keine Selbstverständlichkeiten sind. Das wurde aber erst durch die Forcing–Methode von

[4)] Notiz aus einem seiner Briefbücher. Cantor nannte echte Klassen „inconsistente Vielheiten“

COHEN klar. Kurzum, es gibt über ZFC keine definierbare Wohlordnung $<$ von $\mathcal{V}$, d.h. kein definierbares binäres Prädikat $<$ derart, daß (i) $a \not< a$, (ii) $a < b < c \to a < c$, (iii) $a < b \vee a = b \vee b < a$, (iv) jedes $a \in \mathcal{V}$ enthält ein kleinstes Element bzgl. $<$, (v) für jedes $a \in \mathcal{V}$ ist $\{b \mid b < a\}$ eine Menge. Man kann aber ein inneres Modell für ZFC konstruieren wie Gödel gezeigt hat, das sich definierbar wohlordnen läßt. In diesem Sinne ist das Von Neumann'sche Axiom unabhängig von ZFC.

Übungen

1. Man beweise $\mathcal{V}^{(a)} \sim \mathcal{V}^{(b)}$ für $a, b \neq \emptyset$. Dabei sei $\mathcal{V}^{(a)}$ wie im Text definiert.

   Hinweis. Betrachte $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{(a)}$ mit $F(x) = a \times \{x\}$.

2. Man beweise $\mathfrak{P}(\omega) \sim \mathbb{R}$ mittels Satz 4.1.

   Hinweis. Nach Übung 4 in 3.3 ist $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \sim {}^{\mathbb{N}}2$. Ferner offenbar $\mathbb{R} \sim I_1^0$, mit $I_1^0 = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$. Also genügt zu zeigen ${}^{\mathbb{N}}2 \sim I_1^0$. Jedes $r \in I_1^0$ hat eine eindeutige Darstellung $r = 0, z_0 z_1 \ldots$ mit $z_i \in \{0, 1\}$, wenn „Einer-Enden" ausgeschlossen werden, d.h. wenn gefordert wird, zu jedem i gibt es ein $j > i$ mit $z_j = 0$. Offenbar ist $f : \ \mapsto 0, z_0 z_1 \cdots \to \langle 0, z_0, z_1 \ldots \rangle$ injektiv, so daß $I_1^0 \precsim {}^{\mathbb{N}}2$. Jedem $z \in {}^{\mathbb{N}}2$ kann umkehrbar eindeutig die Zahl $0, z_0 0 z_1 0 \ldots$ zugeordnet werden, also auch $I_1^0 \precsim {}^{\mathbb{N}}2$.

3. Man zeige ${}^{\omega}\omega \sim {}^{\omega}2$ $(\sim \mathfrak{P}(\omega))$.

   Hinweis für ${}^{\omega}\omega \precsim {}^{\omega}2$. Man betrachte $f : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}2$ mit
   $$f(\langle n_0, n_1, \ldots \rangle) = \langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_0}, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, 0, \ldots \rangle$$

4. Man beweise mit dem Satz von Cantor, es gibt transzendente reelle Zahlen.

   Hinweis. Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.

5. Man beweise: Ist $<$ eine definierbare Wohlordnung von $\mathcal{V}$, dann sind alle echten Klassen äquivalent.

   Hinweis. Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ echte Klasse. Es genügt zu zeigen $\mathcal{C} \sim \mathcal{V}$, also nach Satz 4.1 eine injektive Abbildung $F : \mathcal{V} \to \mathcal{C}$ anzugeben. Diese erhält man ganz analog wie eine Injektion $f : \omega \to a$ für unendliches $a \subseteq \omega$.

3.5 Ordnungen, Wohlordnungen und Bäume

Die Halbordnungen und Ordnungen sind nebst den Äquivalenzrelationen sicher die wichtigsten Relationen innerhalb und außerhalb der Mathematik.

Definition. Eine auf ihrem Feld irreflexive und transitive Relation $<$ heißt eine *Halbordnung* oder *partielle Ordnung*. Ein Paar $(a,<)$ mit einer einer Halbordnung $<$, so daß $\operatorname{fld}(<)\subseteq a$ heißt eine *halbgeordnete* oder *partiell geordnete* Menge, kurz, eine p.o. Menge, und man sagt auch, a sei *bezüglich* $<$ *halbgeordnet*.

Es ist klar, daß jede Teilmenge einer p.o. Menge wieder eine solche ist. Sei $(a,<)$ p.o. Menge. Schreibt man wie üblich $x \leqslant y$ für $x < y \vee x = y$, so ist $\leqslant$ reflexiv, transitiv und *antisymmetrisch*, d.h. $(\forall x, y \in a)(x \leqslant y \leqslant x \to x = y)$. Relationen mit den drei letztgenannten Eigenschaften heißen auch *reflexive* Halbordnungen. $<$ wird daher der Deutlichkeit halber zuweilen eine *irreflexive* Halbordnung genannt.[5)] So ist die echte $\subset$ Inklusion zwischen den Elementen von a, genauer $\{(x,y)\in a\times a \mid x\subset y\}$ eine irreflexive, und die Inklusion $\subseteq$ ist die zugehörige reflexive Halbordnung.

Eine p.o. Menge $(a,\subset)$ mit $\subset = \{(x,y)\in a\times a \mid x\subset y\}$ ist der Prototyp einer p.o. Menge. Übung 5 zeigt, daß eine beliebige p.o. Menge zu einem derartigen $(a,\subset)$ isomorph ist. Die Irreflexivität und Transitivitiät umfaßt also sämtliche Informationen über die echte Inklusion. Jede andere Eigenschaft ist eine Folge dieser beiden.

Ist r eine Relation, bezeichnen wir mit $r{\restriction}a$ oder r_a die auf a *eingeschränkte* Relation, $r_a = \{(x,y)\in a\times a \mid x\,r\,y\}$. Meist unterschlägt man den Index einfach. Ist z.B. $(a,<)$ eine p.o. Menge, $b\subseteq a$, und redet man von der p.o. Menge $(b,<)$, so meint man genauer $(b,<_b)$. Analog ist die Einschränkung $\mathcal{R}{\restriction}a$ eines Prädikats $\mathcal{R}$ auf a definiert: $\mathcal{R}{\restriction}a = \{(x,y)\in a\times a \mid x\,\mathcal{R}\,y\}$. So werden für interessante Mengen a oft die Strukturen $(a,\in_a)$ betrachtet.

Sei $(a,<)$ eine vorgegebene p.o. Menge. Ein Element $x\in a$ heißt ein *maximales Element* in a (genauer in $(a,<)$), wenn kein $x'\in a$ mit $x < x'$ existiert. Analog definiert man den Begriff *minimales Element*. Eine p.o. Menge muß weder minimale noch maximale Elemente besitzen. So besitzt z.B. ω bezüglich der $<$–Relation, welche ja nichts anderes als die Einschränkung von $\in$ auf ω ist, kein maximales Element. In total geordneten Mengen bedeuten maximales und größtes Element dasselbe.

[5)]Diese Terminologie ist für die Mathematik nicht verbindlich, für uns aber bequem. Z.B. nennt man oft die (reflexiven) Halbordnungen häufig nur Ordnungen und Ordnungen im Sinne der Definition unten dann totale oder lineare Ordnungen.

Es ist anschaulich klar und läßt sich induktiv leicht beweisen, daß eine endliche p.o. Menge sowohl ein minimales als auch ein maximales Element besitzt. Damit enthält jede Teilmenge von $\mathfrak{P}(a)$ für $a \in \mathcal{F}in$ ein maximales Element; dies ist kennzeichnend für endliche Mengen (Übung).

Eine Teilmenge $b \subseteq a$ einer p.o. Menge $(a, <)$ heißt (nach oben) *beschränkt*, wenn ein $s \in a$ mit $x \leqslant s$ für alle $x \in a$ existiert, und *echt beschränkt*, wenn $x < s$ für alle $x \in a$. Ist $b \subseteq a$ beschränkt und s_0 eine obere Schranke mit $s_0 \leqslant s$ für alle sämtliche Schranken s von a, so heißt s_0 das *Supremum* von b, $s_0 = \sup b$. Analog definiert man *nach unten beschränkt* und *Infimum* von b, $\inf b$. Es kann offenbar nur höchstens eine obere Schranke für die Gesamtmenge a geben. Falls diese existiert, heißt sie das *größte Element* von a. Analog definiert man den Begriff *kleinstes* Element. Geht man von einer reflexiven Halbordnung aus, definiert man diese Begriffe sinngemäß.

Bäume und geordnete Mengen sind Spezialfälle halbgeordneter Mengen:

Definition. Eine p.o. Menge $(a, <)$ heißt eine *geordnete Menge*, falls $<$ *konnex* ist, d.h. falls $(\forall xy \in a)(x < y \vee x = y \vee y < x)$. Man nennt $<$ dann auch eine *Ordnung*, mitunter auch eine *totale Ordnung* von a. Hat jedes nichtleere $b \subseteq a$ ein kleinstes Element, heißt $(a, <)$ eine *wohlgeordnete* Menge oder kurz eine *Wohlordnung*. Ist $(a, <)$ eine p.o. Menge, so heißt $b \subseteq a$ eine *Kette* in a, wenn b bzgl. $<$ total geordnet ist. Eine p.o. Menge $(a, <)$ mit kleinstem Element derart, daß $a_{<x} := \{y \in a \mid y < x\}$ für jedes $x \in a$ eine Kette ist, bezeichnet man als einen *Baum*; dessen kleinstes Element heißt die *Wurzel* des Baumes[6)].

Ist a bezüglich $<$ geordnet bzw. wohlgeordnet bzw. ein Baum, so gilt entsprechendes offenbar für jede Teilmenge $b \subseteq a$.

Beispiele. (a) $(n, \in\restriction n)$ ist nach Übung 4 in **2.6** wohlgeordnet und sogar *diskret geordnet*. Darunter verstehe man eine geordnete Menge $(a, <)$ derart, daß jede nichtleere Teilmenge $b \subseteq a$ sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element besitzt. Das ist nur eine geringfügige Verallgemeinerung der erwähnten Übung.

(b) Nach Satz 2.6.7 ist ω $\in$-geordnet, d.h. $(\omega, <)$ ist geordnet, mit $< := \in\restriction\omega$. Wir zeigen ohne AF, $(\omega, <)$ ist wohlgeordnet (mit AF folgt dies unmittelbar aus der Fundiertheit von ω). Sei $u \subseteq \omega$ nichtleer. Falls u nur ein Element hat, ist dieses auch das kleinste. Andernfalls läßt sich ein $n \in u$ so wählen, daß noch $k \in u$ für ein $k < n$, so daß wegen $k \in n$ dann $u \cap n \neq \emptyset$. Daher hat $u \cap n$ ein kleinstes Element m, denn n ist wohlgeordnet. Wir behaupten, m ist auch kleinstes Element von u in ω. Denn

[6)]Bisweilen wird gefordert, daß $a_{<x}$ für jedes $x \in a$ sogar wohlgeordnet ist.

sei $k \in u$. Wäre $k < m$, so offenbar $k \in u \cap n$ und damit $m \leqslant k$ im Widerspruch zu $k < m$. Also ist $m \leqslant k$, wie zu beweisen war.

(c) Eine Teilmenge $a \subseteq v$ mit $(\forall xy \in a)(x < y \in a \to x \in a)$ heiße ein *Anfang* einer geordneten Menge $(v, <)$, symbolisch $a \trianglelefteq v$. Wir schreiben wir $a \triangleleft v$ für $a \trianglelefteq v$ und $a \neq v$ und nennen a dann einen *echten Anfang*. Sei A die Menge aller Anfänge von v. Auch $(A, \subset)$ ist eine geordnete Menge mit dem kleinsten Element $\emptyset$. Ferner ist $c := \bigcup C$ für jede Teilmenge $C \subseteq A$ wieder ein Anfang von a wie man mühelos verifiziert. c ist das Supremum von C in $(A, \subset)$. Dies ist nämlich der Fall für eine beliebige Teilmenge $B \subseteq \mathfrak{P}(v)$, sofern für jedes $C \subseteq B$ auch $\bigcup C \in B$ (Übung 3).

(d) Sei $(a, <)$ eine nichtleere p.o. Menge und sei K die Menge aller Ketten $k \subseteq a$. Sicher ist K bzgl. Inklusion partiell geordnet, aber interessanter ist die p.o. Menge $(K, \triangleleft)$. Diese ist sogar ein Baum. Denn sind $k, k' \triangleleft h$ Anfänge, so ist klar, daß entweder k ein Anfang von k' ist oder umgekehrt. $(K, \triangleleft)$ heißt der zu $(a, <)$ gehörige *Kettenbaum.* Er enthält als Teilbaum die Menge K^w aller wohlgeordneten Ketten von a. Beide Bäume haben als Wurzel die leere Menge (eine triviale Kette von a).

(e) Unter einer *teilweisen Ordnung* einer Menge a verstehen wir eine Ordnungsrelation p mit $\bar{p} := \operatorname{fld} p \subseteq a$. Durch p wird also nur ein Teil von a total geordnet. Dieser nur vorübergehend benutzte Begriff darf nicht mit der partiellen Ordnung verwechselt werden. Ist z.B. $a = \{x, y, z\}$ und sind x, y, z paarweise verschieden, so ist $p = \{(x, y)\}$ eine teilweise Ordnung von a mit $\operatorname{fld} p = \{x, y\}$. Sei $T = T_a$ die Menge aller teilweisen Ordnungen von a. Für $p, q \in T$ sei $p \triangleleft q$, wenn $p \subset q$ und wenn $\forall x, y((x, y) \in q \wedge y \in \bar{p} \to x \in \bar{p})$. Offenbar ist $(T, \triangleleft)$ ein Baum mit der Wurzel $\emptyset$. Dieser enthält als Teilbaum die Menge T^w aller *teilweisen Wohlordnungen* von a, d.h. $p \in T^w$, wenn $\bar{p}$ durch p wohlgeordnet ist.

Definition. Eine p.o. Menge $(a, <)$ heiße *induktiv*, wenn jede nichtleere Kette $k \subseteq a$ ein Supremum in a besitzt.

Von jetzt an wird das Wort „induktiv“ nur noch in diesem Sinne verwendet, solange nichts anderes gesagt wird. Ist z.B. K die Menge aller Ketten einer p.o. Menge a, so ist die p.o. Menge $(K, \subset)$ induktiv. Denn ist $C \subseteq K$ Kette in K, so ist auch $\bigcup C$ eine Kette in a und zugleich das Supremum von C in K.

Sämtliche in den Beispielen (d), (e) vorkommenden Bäume sind induktiv. In allen Fällen ist $\bigcup C$ gerade das Supremum einer Kette C. Dies ist jedoch eher ein Zufall als eine Gesetzmäßigkeit und sollte in jedem Einzelfall besser nachgewiesen werden. Seien die $k \in C$ z.B. wohlgeordnet. Dann ist auch $u := \bigcup C$ wohlgeordnet. Denn sei

$v \subseteq u$ nichtleer. Dann ist auch $v \cap k$ nichtleer für wenigstens ein $k \in C$ und hat ein kleinstes Element e, das zugleich kleinstes Element in v ist; denn mit $x \in v$ ($\subseteq u$) und $x < e$ ist auch $x \in k$, weil $k \lhd u$. Also $x \in v \cap k$, was der Bestimmung von e widerspricht. Auch ist plausibel, daß $u = \bigcup C$ das Supremum einer Kette C im Baum $(T^w, \lhd)$ der teilweisen Wohlordnungen ist; denn die Vereinigung der Wohlordnungen der $k \in C$ ordnet u so, daß jedes $k \in C$ Anfang von u ist und dies ist wie gerade bewiesen wurde auch eine Wohlordnung von u, also eine teilweise Wohlordnung von a.

Wohlgeordnete Mengen $(a, <)$ und $(b, <)$ sind anders als beliebig geordnete Mengen immer vergleichbar in dem Sinne, daß $(a, <)$ einem Anfang von $(b, <)$ isomorph ist oder umgekehrt. Dies ist Satz refdsv des nächsten Abschnitts.

Der Begriff p.o. Menge verallgemeinert sich in natürlicher Weise zum Begriff einer *p.o. Klasse*. Es ist dies ein Paar $(\mathcal{A}, <)$, wobei $\mathcal{A}$ eine Klasse und $<$ ein binäres Prädikat ist, das auf $\mathcal{A}$ irreflexiv und transitiv ist. Die Schreibweise $(\mathcal{A}, <)$ meint hier nicht das für echte Klassen $\mathcal{A}$ gar nicht existierende geordnete Paar, sondern sie deutet nur die momentane Zusammengehörigkeit von $\mathcal{A}$ und $<$ an. Völlig analog definiert man geordnete bzw. wohlgeordnete Klassen.

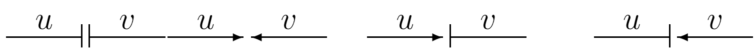
Wir setzen fortan immer voraus, daß $\{y \in \mathcal{A} \mid y \leqslant x\}$ für jedes $x \in \mathcal{A}$ eine Menge ist. Andere p.o. Klassen spielen kaum eine Rolle. Kurzum, beschränkte Teilklassen von $\mathcal{A}$ sollen Mengen sein. So ist z.B. $(\mathcal{V}, \subset)$ eine p.o. Klasse in diesem Sinne. Denn $\{y \in \mathcal{V} \mid y \subseteq x\} = \mathfrak{P}(x)$ ist sicher eine Menge. Man beachte, ein echter Anfang a einer (wohl)geordneten Klasse $(\mathcal{A}, <)$ ist verabredungsgemäß eine Menge, weil a beschränkt ist. Daß es geordnete und sogar wohlgeordnete echte Klassen überhaupt gibt, wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen.

Satz 5.1 (Satz von Hartogs). *Sei $\mathcal{C}$ eine w.o. echte Klasse. Dann existiert zu jeder Menge a ein Anfang $b \lhd \mathcal{C}$ mit $b \not\precsim a$.*

Beweis. Sei T die Menge aller teilweisen Wohlordnungen p von a derart, daß ein Anfang $c \lhd \mathcal{C}$ existiert mit $(c, <) \simeq (\bar{p}, p)$, wobei $\bar{p} := \mathrm{fld}\, p$. Nach Übung 2 gibt es zu $p \in T$ genau ein derartiges c, das mit c_p bezeichnet sei. Wegen AR ist $A := \{c_p \mid p \in T\}$ eine Menge, also auch $u := \bigcup A$. Sicher ist $u \lhd \mathcal{C}$. Sei nun $b := u \cup \{\min(\mathcal{C} \setminus b)\}$, so daß auch $b \lhd \mathcal{C}$. Dann ist $b \not\precsim a$; denn andernfalls wäre $b \in A$, weil die Wohlordung von b bei einer Injektion nach a eine teilweise Wohlordnung von a erzeugt. $b \in A$ ist aber ausgeschlossen, sonst wäre $b \subseteq u$ im Widerspruch zu $u \subset b$. ❏

Nachdem nur wenigstens eine wohlgeordnete Klasse angegeben worden ist – und das wird ganz ohne AC alsbald gelingen – folgt aus obigem Satz, daß es beliebig große wohlgeordnete Mengen gibt. Genauer, zu jeder wohlgeordneten Menge a existiert eine weitere echt größerer Mächtigkeit. Auch das wird im nächsten Abschnitt bewiesen. Demnach gibt es – unabhängig von AC – immer auch überabzählbare wohlgeordnete Mengen. Man kann leicht ganz verschiedene Wohlordnungen einer abzählbar unendlichen Menge konstruieren. Aber überabzählbare Wohlordnungen sind nur sehr schwer zu beschreiben. Am genauesten studiert ist die Wohlordnung von ω_1, der ersten überabzählbaren Ordinalzahl.

Die folgenden Begriffe betreffen spezielle geordnete Mengen und sind wichtig z.B. für die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen. Sei $(a,<)$ geordnet. Ein *Schnitt* von a sei eine Partition $a = u \cup v$ (d.h. $u \cap v = \emptyset \neq u, v$) derart, daß $(\forall x \in u)(\forall y \in v)x < y$. Der Schnitt (u,v) heißt ein *Sprung*, wenn u ein größtes und v ein kleinstes Element enthält, bzw. eine *Lücke*, wenn weder u ein größtes noch v ein kleinstes Element hat. Die Figur veranschaulicht diese und die beiden verbleibenden Fälle:



Sprung Lücke Dedekind'sche Schnitte

Eine geordnete Menge a ohne Randelemente (d.h. ohne kleinstes und größtes Element) heiße *dicht geordnet*, und darüber hinaus *stetig geordnet*, wenn jeder Schnitt ein Dedekind'scher ist. Ein Beispiel ist $(\mathbb{R},<)$. Dicht geordnete Mengen wie z.B. $(\mathbb{Q},<)$ sind stets unendlich, und stetig geordnete Mengen darüberhinaus überabzählbar, was hier nur erwähnt sei. Man kann für dicht und stetig geordnete Mengen auch Randelemente zulassen, muß dann aber obige Definitionen entsprechend modifizieren. Jede dicht geordnete Menge ist auf kanonische Weise in eine stetig geordnete Menge dicht einbettbar, siehe Übung 9.

Übungen

1. Man beweise, für eine geordnete Menge $(a,<)$ sind äquivalent

   (i) $(a,<)$ ist wohlgeordnet,

   (ii) jedes $x \in a$, das nicht größtes Element in a ist, hat einen unmittelbaren Nachfolger in a und jeder echte Anfang $b \subseteq a$ hat ein Supremum.

   Hinweis (ii)$\Rightarrow$(i): $\emptyset$ ist echter Anfang und $\sup\emptyset$ existiert genau dann, wenn a ein kleinstes Element hat.

2. Sei $\boldsymbol{b} = (b, <)$ wohlgeordnet, $\boldsymbol{a} = (a, <)$ ein Anfang von $\boldsymbol{b}$ und $f : \boldsymbol{a} \cong \boldsymbol{b}$. Man zeige, $f = id_a$ und damit $a = b$. Daraus schließe man: Sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ isomorphe Anfänge einer beliebigen wohlgeordneten Menge (oder auch Klasse) C, so ist $a = b$.

   Hinweis. Führe Annahme $(\exists x \in a) f(x) \neq x$ zum Widerspruch.

3. Sei $u \subseteq \mathfrak{P}(v)$ und für jedes $w \subseteq u$ sei auch $\bigcup w \in u$. Man zeige $\bigcup w$ ist das Supremum von w in $(u, \subset)$.

4. *Ordnungstheoretische Charakterisierung von* ω: Zeige, es gibt eine und bis auf Isomorphie nur eine geordnete Menge $(a, <)$ derart, daß jeder echte Anfang von a diskret geordnet ist und a kein größtes Element hat, nämlich $(\omega, <)$.

   Hinweis. Zeige zu jedem n existiert genau ein f_n mit $f_n : \xrightarrow{\text{inj}} a$ und $im\, f_n$ ist Anfang von a. Der gesuchte Isomorphismus ist $f = \bigcup_{n \in \omega} f_n$.

5. *Ordnungstheoretische Charakterisierung endlicher Mengen.* Man zeige, eine Menge a ist endlich genau dann, wenn a diskret geordnet werden kann.

   Hinweis. $\Rightarrow$: $a \sim n$ und $(n, \in_n)$ ist diskret geordnet. $\Leftarrow$: Sei $(a, <)$ diskret geordnet. O.B.d.A. $a \cap \omega = \emptyset$. Ordne $a \cup \omega$ geschickt und verwende Übung 3.

6. Man beweise den *Repräsentationssatz für p.o. Mengen.* Sei $(a, <)$ p.o. Menge und $a' = \{s_x \mid x \in a\}$ mit $s_x = \{y \in a \mid y \leqslant a\}$. Dann ist $(a, <) \simeq (a', \subseteq)$.

7. Sei $(a, <)$ geordnet und PF^a_b die Menge aller *partiellen Funktionen* von a nach b, d.h. aller $f \in \mathcal{F}n$ mit $dom\, f \subseteq a$ und $im\, f \subseteq b$. Für $f, g \in PF^a_b$ sei $f \lhd g$, wenn $f \subseteq g$ und wenn $dom\, f$ echter Anfang von $dom\, g$ bezüglich der Ordnung $<$ ist. Man zeige, $(PF^a_b, \lhd)$ ist ein induktiver Baum.

8. Sei $(v, <)$ induktive geordnete Menge, $a \subseteq b \subseteq v$. Man zeige $\sup a = \sup b$ genau dann, wenn a *kofinale* Teilmenge von b ist, d.h. zu jedem $x \in a$ gibt es ein $y \in b$ mit $x \leqslant y$.

9. Man beweise, zu jeder dicht geordneten Menge $(a, <)$ existiert eine stetig geordnete Menge $(a', <)$ mit $a \subseteq a'$ und $< \subseteq <'$, so daß zwischen zwei Elementen von a' noch ein Element von a liegt (Dedekind).

   Hinweis. Sei A die Menge aller nichtleeren echten Anfänge von a ohne größtes Element. $(a, <)$ ist in $(A, \subset)$ isomorph einbettbar.

3.6 Progressionen – Bourbaki's Fixpunktsatz

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts, Theorem 1 ermöglicht nicht nur simple Beweise für den Wohlordnungssatz, sowie das Zornsche Lemma und anderer Maximalprinzipien in Kapitel **4**, sondern es liefert auch alle Arten von Rekursionstheoremen praktisch als Korollarien. Zwar läßt sich Theorem 1 auch unschwer mit dem ordinalen Rekursionstheorem beweisen; aber es geht einfacher und wäre ein Stilbruch insofern, als Theorem 1 nur die ersten vier Axiome benötigt. Erst in gewissen Anwendungen kommen andere Axiome ins Spiel. Der Beweis ist einfach und, wie stets in solchen Fällen, konstruktiv, weil er die Existenz einer Klasse behauptet. Formuliert man ihn nur für Mengen, würde man sich vieler Anwendungsmöglichkeiten berauben.

Eine p.o. Klasse $(\mathcal{A}, <)$ heiße *induktiv*, wenn jede Kette $k \subseteq \mathcal{A}$ beschränkt ist und darüber hinaus ein Supremum in $\mathcal{A}$ hat (das in der Regel nicht zu k gehört). Auf die Voraussetzung $k \in \mathcal{V}$, muß immer geachtet werden. In diesem Sinne ist z.B. $(\mathcal{V}, \subset)$ induktiv. Denn eine Kette $k \subseteq \mathcal{V}$ bzgl. $\subset$ hat das Supremum $\bigcup k \in \mathcal{V}$. Eine induktiv geordnete Klasse kann anders als eine induktiv geordnete Menge auch unbeschränkte Ketten enthalten. Eine solche ist notwendig echte Klasse, denn beschränkte Ketten sind Mengen. Unbeschränkte Ketten existieren in $(\mathcal{V}, \subset)$ nach Theorem 1.

Sei $(\mathcal{A}, <)$ p.o. Klasse. Ein Operator $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heiße *progressiv*, wenn $x \leqslant x^\pi$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Kurz, $x \leqslant x^\pi \leqslant x^{\pi\pi} \ldots$ So ist der Operator $x \mapsto x^{+1} = x \cup \{x\}$ sicher progressiv in $(\mathcal{V}, \subset)$ und zwar echt progressiv, denn er besitzt wegen $x \notin x$ keine Fixpunkte.

Für Mengen $\mathcal{A}$ ist alles völlig sinngemäß erklärt. Ein Operator $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist dann eine Funktion und wir reden dementsprechend von progressiven Funktionen.

Sei $(\mathcal{A}, <)$ eine induktive p.o. Klasse und $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ progressiv. Eine π*–Kette* ist eine nichtleere total geordnete Teilklasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

(A) $(\forall x \in \mathcal{C}) x^\pi \in \mathcal{C}$, (B) für jede nichtleere Menge $a \subseteq \mathcal{C}$ ist $\sup a \in \mathcal{C}$.

Kurz, eine π–Kette $\mathcal{C}$ ist nichts anderes als eine induktive, gegenüber π abgeschlossene geordnete Teilklasse von $\mathcal{A}$. Man beachte nämlich, $\sup a$ ist wegen (B) zugleich das Supremum von a in $\mathcal{C}$. Ist $\mathcal{C}$ selbst Menge, so gilt nach (B) auch $\sup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathcal{C}$ ein größtes Element besitzt.

Theorem 1. *Sei $(\mathcal{A}, <)$ eine induktive p.o. Klasse, $e \in \mathcal{A}$, und $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ progressiv. Dann existiert eine sogar wohlgeordnete π–Kette $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\min \mathcal{C} = e$.*

Der Beweis wird nachgeliefert. Betrachten wir zuerst eine Anwendung des Theorems für den Fall, daß $(\mathcal{A}, <)$ eine p.o. Menge ist. Der Witz bei folgendem Satz ist seine Unabhängigkeit von AC. Hier, wie in ähnlich gearteten Sätzen, wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die zugrundeliegende p.o. Menge nichtleer ist.

Satz 6.1 (Bourbaki's Fixpunktsatz). *Sei $(a, <)$ eine induktive p.o. Menge und $\pi : a \to a$ sei progressiv. Dann hat π einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $e \in a$. Nach Theorem 1 existiert eine von e ausgehende π–Kette $\mathcal{C} \subseteq a$, die jetzt aber Menge ist. Damit folgt nach Bedingung (B) aber auch $s := \sup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Folglich ist $s^\pi \leqslant s$ und somit $s^\pi = s$. ❏

Auf Möglichkeiten der Verschärfung von Satz 6.1 verweist die Bemerkung am Ende. Zwecks Demonstration seiner Nützlichkeit beweisen wir nun den berühmten Wohlordnungssatz von Zermelo, den Satz 6.2, der sich in Kapitel 4 mit AC als äquivalent erweisen wird. Von der Existenzannahme einer Auswahlfunktion in diesem Satz befreien wir uns im nächsten Kapitel leicht mittels AC.

Wir erinnern zunächst an den Baum T^w der teilweisen Wohlordnungen von a mit der Anfangsordnung $\lhd$ (Beispiel (d) in **3.5**). Ist $p \in T^w$ mit $\bar{p} = \operatorname{fld} p$ noch keine Wohlordnung von a und etwa $y \in a \setminus \bar{p}$, so läßt sich durch Hinzunahme von y „um einen Schritt nach rechts verlängern". Denn $p * y := p \cup \{(x, y) \mid x \in \bar{p}\}$ ist wieder eine teilweise Wohlordnung von a mit $\operatorname{fld}(p * y) = \bar{p} \cup \{y\}$. Dies verbildlicht die folgende Figur. p ist offenbar echter Anfang von $p * y$, also $p \lhd p * y$.

$$\underbrace{\bullet\ \ \bullet\ \ \bullet\ \bullet\ \bullet \cdots}_{\bar{p}}\quad \underset{y}{\bullet}$$

Satz 6.2. *Sei a eine Menge und es existiere eine Auswahlfunktion ζ auf $\mathfrak{P}(a)$, d.h. $\zeta u \in u$ für alle nichtleeren $u \subseteq a$. Dann kann a wohlgeordnet werden.*

Beweis. Sei T^w die induktive p.o. Menge aller teilweisen Wohlordnungen von a mit der Anfangsordnung $\lhd$. Es sei $\pi : T^w \to T^w$ wie folgt erklärt. Für $p \in T^w$ mit $\bar{p} := \operatorname{fld} p$ sei $p^\pi = p * \zeta(a \setminus \bar{p})$ die Verlängerung von p um einen Schritt, sofern $a \setminus \bar{p} \neq \emptyset$. Falls aber $a \setminus \bar{p} = \emptyset$ – und p damit Wohlordnung von ganz a ist – sei $p^\pi = p$. Offenbar ist π progressiv. Gemäß Satz 6.1 hat π einen Fixpunkt p; der Fall $a \setminus \bar{p} = \emptyset$, d.h. $\bar{p} = a$, tritt also wirklich ein und p ist dann eine Wohlordnung von ganz a. ❏

Hier drei weitere einfache Folgerungen aus Satz 6.1 und Theorem 1.

Korollar 6.3. *Ist* $(\mathcal{A}, <)$ *induktive p.o. Klasse und* $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *echt progressiv, so ist jede* π*–Kette* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ *und damit auch* $\mathcal{A}$ *eine echte Klasse. Es gibt wohlgeordnete echte Klassen in* $\mathcal{V}$.

Beweis. Wäre $\mathcal{C}$ Menge, hätte π nach Satz 6.2 einen Fixpunkt. Demnach ist eine nach Theorem 1 existierende $^{+1}$-Kette in $(\mathcal{V}, \subset)$ eine wohlgeordnete echte Klasse, denn $x \mapsto x^{+1}$ ist echt progressiv [7]. ❏

Satz 6.4. *Sei* $(a, <)$ *p.o. Menge und es gebe eine* Schrankenfunktion σ, *d.h.* $x < \sigma k$ *für alle* $x \in k$ *einer echt beschränkten Kette* $k \subseteq a$. *Ist jede Kette* $k \subseteq a$ *beschränkt, so hat* a *ein maximales Element.*

Beweis. Sei $(K, \subset)$ die p.o. Menge aller Ketten $k \subseteq a$. Für $k \in K$ sei $k^\pi = k \cup \{\sigma k\}$, falls k echt beschränkt ist und $k^\pi = k$ sonst. π hat einen Fixpunkt k_0 nach Satz 6.2. Ist b Schranke für k_0, so ist b notgedrungen ein maximales Element in a. ❏

Wieder befreit man sich mittels AC leicht von der angenommenen Existenz einer Schrankenfunktion. So gesehen besagt Satz 6.4 nichts anderes als das in **4.1** formulierte Zornsche Lemma. Mühelos ergibt sich auch der Beweis von

Satz 6.5 (Cantor's Vergleichbarkeitssatz für wohlgeordnete Mengen). *Es seien* $a = (a, <)$ *und* $b = (b, <)$ *wohlgeordnete Mengen. Dann ist* a *zu einem Anfang von* b *isomorph oder umgekehrt.*

Beweis. Sei P Menge aller f mit $f : a' \simeq b'$, so daß $a' \trianglelefteq a$ und $b' \trianglelefteq b$. Man definiere eine Progression π auf P wie folgt: $f^\pi = f \cup \{(x, y)\}$ mit $x = \min(a \setminus a')$, $y = \min(b \setminus b')$, falls $a \neq a'$, $b \neq b'$, und $f^\pi = f$ sonst. π hat nach Satz 6.2 einen Fixpunkt, womit alles gezeigt ist. ❏

Satz 6.6. *Zu jeder Wohlordnung* $(a, <)$ *existiert eine Wohlordnung* $(b, <)$ *mit* $a \prec b$.

Beweis. Sei $(\mathcal{C}, <)$ echte wohlgeordnete Klasse und $b \triangleleft \mathcal{C}$ so gewählt, daß $b \not\precsim a$. Nach Satz 6.5 ist $(a, <)$ zu einem Anfang von $(b, <)$ isomorph, weil die andere Möglichkeit entfällt. Daher $a \precsim b$ und wegen $b \not\precsim a$ sogar $a \prec b$. ❏

Dieser Satz garantiert unabhängig von AC beliebig große wohlgeordnete Mengen. Zum Beweis von Theorem 1 behandeln wir zuerst einen Spezialfall.

[7] Wendet man dasselbe Argument auf die Klasse $\mathcal{T}r$ aller transitiven Mengen an auf welcher sowohl $x \mapsto x^{+1}$ als auch $x \mapsto \mathfrak{p}(x)$ echte Progressionen sind, so erhielte man schon an dieser Stelle die später auf eine etwas andere Art definierten Klassen On der Ordinalzahlen und die Von Neumann'sche Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha \in On}$.

Lemma. *Sei* $(\mathcal{B},<)$ *ein induktiver Baum und* $':\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ *eine Progression, sowie* $(\forall kh\in\mathcal{B})(k<h\to k'\leqslant h)$. *Dann ist* $\mathcal{C}=\{c\in\mathcal{B}\mid(\forall k\in\mathcal{B})(k\leqslant c\vee c\leqslant k)\}$ *eine* $'$*–Kette mit der Eigenschaft* $(*)$ $d<c\in\mathcal{C}\to d\in\mathcal{C}$ *für alle* $d\in\mathcal{B}$.

Beweis. $\mathcal{C}$ ist sicher total geordnete und enthält die Wurzel von $\mathcal{B}$, also $\mathcal{C}\neq\emptyset$. Sei $c\in\mathcal{C}$ und $k\in\mathcal{B}$. Falls $k\leqslant c$, ist $k\leqslant c'$; falls aber $c<k$, ist $c'\leqslant k$. Also $k\leqslant c'\vee c'\leqslant k$ in jedem Falle, d.h. $c'\in\mathcal{C}$ und (A) in der Definition Seite 66 ist bewiesen. Sei nun $a\subseteq\mathcal{C}$ Menge, $s=\sup a$ und $k\in\mathcal{B}$. Entweder ist $(\forall h\in a)h<k$ und damit $s\leqslant k$ – oder aber $k\leqslant h\leqslant s$ für ein $h\in a$. Also $s\in\mathcal{C}$. Das beweist (B). Zum Nachweis von $(*)$ sei $d<c\in\mathcal{C}$, $k\in\mathcal{B}$. Ist $c\leqslant k$, so $d\leqslant k$; falls aber $k<c$, also $k,d<c$, gilt $k\leqslant d\vee d\leqslant k$, denn $\mathcal{B}$ ist ein Baum. Folglich $d\in\mathcal{C}$ und $(*)$ ist bewiesen. ❑

Beweis von Theorem 1. Sei $e\in\mathcal{A}$ und $(\mathcal{B},<)$ der Baum aller geordneten Ketten $k\subseteq\mathcal{A}$ mit der hier gleichfalls mit $<$ bezeichneten Anfangsordnung von $\mathcal{B}$, so daß

(1) e ist erstes Element von k,

(2) Ist $x,y\in k$ mit $x<y$, so ist $x^\pi\in k$ und $x^\pi\leqslant y$,

(3) Ist $h\neq\emptyset$ echter Anfang von k, so ist $\sup h\in k$.

$\mathcal{B}$ ist induktiv mit $\sup K=\bigcup K$ für Ketten $K\subseteq\mathcal{B}$ $(K\in\mathcal{V})$ und hat die Wurzel $\{e\}$ wie man leicht sieht. Auch gilt offenbar (4): $k\in\mathcal{B}\to h\in\mathcal{B}$ für jeden nichtleeren Anfang $h\leqslant k$. Man betrachte nun folgende Progression $'$ auf $\mathcal{B}$: Hat $k\in\mathcal{B}$ ein größtes Element y, sei $k'=k\cup\{y^\pi\}$; sonst sei $k'=k\cup\{\sup k\}$. Man prüft dann unschwer $(\forall kh\in\mathcal{B})(k<h\to k'\leqslant h)$ mittels der Eigenschaften (2) und (3). Das Lemma garantiert uns eine $'$–Kette $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$. Wir behaupten, die Kette $\mathcal{D}=\bigcup\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$ ist eine π–Kette. Dazu überprüfen wir die Definitionsbedingungen (A) und (B). Für $x\in\mathcal{D}$, etwa $x\in k\in\mathcal{C}$, sei $c_x:=\{y\in\mathcal{D}\mid y\leqslant x\}=\{y\in k\mid y\leqslant x\}$. Es gilt dann $c_x\leqslant k$. Daher $c_x\in\mathcal{B}$ gemäß (4) und sogar $c_x\in\mathcal{C}$ nach $(*)$ im Lemma. Damit ist auch $c_x\cup\{x^\pi\}=c_x'\in\mathcal{C}$; also $x^\pi\in\mathcal{D}$. Das beweist (A). Sei $a\subseteq\mathcal{D}$ eine nichtleere Menge. Um $\sup a\in\mathcal{D}$ zu beweisen, darf man o.B.d.A. annehmen, a ist Anfang von $\mathcal{D}$. Dann ist $a=\bigcup\{c_x\mid x\in a\}=\sup_{\mathcal{B}}\{c_x\mid x\in a\}\in\mathcal{C}$. Falls $\sup a\in a$, gilt (B) trivial. Andernfalls hat a kein größtes Element und mit $a\in\mathcal{C}$ ist $a\cup\{\sup a\}=a'\in\mathcal{C}$. Daher ist $\sup a\in\mathcal{D}$ auch jetzt und (B) ist bewiesen. Auch ist $\mathcal{D}\neq\emptyset$, denn $e\in\mathcal{D}$. Schließlich ist $\mathcal{D}$ auch wohlgeordnet. Denn $\mathcal{D}$ hat offenbar selbst die Eigenschaften (1), (2), (3) mit $\mathcal{D}$ für k und nach (2) hat jedes $x\in\mathcal{D}$, das nicht größtes Element in $\mathcal{D}$ ist, den unmittelbaren Nachfolger $x^\pi\in\mathcal{D}$. Gemäß Übung 1 in **3.5** ist $\mathcal{D}$ damit wohlgeordnet. ❑

Bemerkung. In Theorem 1 würde die Voraussetzung genügen, daß alle nichtleeren wohlgeordneten Ketten $k\subseteq\mathcal{A}$ ein Supremum besitzen. Auch Satz 6.2 ließe sich noch verschärfen.

Es genügt statt der Induktivität vorauszusetzen, daß eine Schrankenfunktion für $(a,<)$ existiert; es reicht sogar eine Schrankenfunktion für die echt beschränkten wohlgeordneten Ketten $k \subseteq a$. Bei Theorem 1 handelt es sich ebenso wie bei Satz 4.1 oder beim später bewiesenen Rekursionstheorem um eine Behauptung der Form $\forall\mathcal{A}\exists\mathcal{B}H(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Da Klassen jedenfalls innerhalb ZF nicht quantifizierbar sind, ist der Beweis einer solchen Behauptung stets das eingelöste Versprechen, zu einer vorgegebenem Klasse $\mathcal{A}$ eine Klasse $\mathcal{B}$ explizit so anzugeben, daß $H(\mathcal{A},\mathcal{B})$ erfüllt wird. Tatsächlich wird im Beweis von Theorem 1 eine π-Kette explizit konstruiert, wenn man alle Beweisschritte sorgfältig verfolgt.

Übungen

1. Seien $(\mathcal{A},<)$, $(\mathcal{B},<)$ echte wohlgeordnete Klassen. Zeige, es gibt (genau) einen Isomorphismus $F:\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}$. Kurz, wohlgeordnete echte Klassen sind isomorph.

   Hinweis. Sei $\mathcal{F}$ Klasse aller f mit $f:a \simeq b$ für Anfänge $a \triangleleft \mathcal{A}$, $b \triangleleft \mathcal{B}$ und sei $f^\pi = f \cup \{(\min(\mathcal{A}\setminus a), \min(\mathcal{B}\setminus b))\}$. π ist echt progressiv auf $(\mathcal{F}, \subset)$. Ist $\mathcal{C}$ π–Kette, leistet $F = \bigcup\mathcal{C}$ das Verlangte (beachte $\mathcal{C}$ ist echte Klasse).

2. *Tarski's Fixpunktsatz verallgemeinert.* Sei $(a,<)$ induktive p.o. Menge mit kleinstem Element und $\pi:a \to a$ sei monoton, d.h. $x \leqslant y \to \pi(x) \leqslant \pi(y)$ für $x,y \in a$. Man zeige, π hat einen Fixpunkt[8].

   Hinweis. Betrachte $b = \{x \in a \mid x \leqslant \tau(x)\}$ und zeige, auch b ist induktiv.

3. Man beweise mit dem Fixpunktsatz von Tarski den Satz von Cantor–Bernstein.

   Hinweis. Sei $b \subseteq a$, $f:a \xrightarrow{\text{inj}} b$, $c := a \setminus b$ und $A = \mathfrak{P}(a)$. Die Funktion $F:A\to A$ mit $F(x) = x \cup c$ ist monoton in $(A, \subset)$. Ist d $(\subseteq a)$ Fixpunkt von F und $e = a \setminus f[a]$, so ist $f{\restriction}d \cup id_e$ Bijektion von a auf b.

4. Sei $f:[0,1]\to[0,1]$ eine monotone, sonst aber völlig beliebige Funktion, wobei $[0,1] := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant r \leqslant 1\}$. Man zeige, f hat einen Fixpunkt.

   Hinweis. $([0,1],<)$ ist induktiv, also greift Tarski's Fixpunktsatz.

5. Sei V beliebiger Vektorraum über dem Körper K und ζ Auswahlfunktion für V, d.h. $\zeta a \in a$ für alle $a \subseteq V$, $a \neq \emptyset$. Zeige mit Satz 6.2, V hat eine Basis.

   Hinweis. Sei $(U, \subset)$ die induktive p.o. Menge aller linear unabhängigen Teilmengen $u \subset V$. Für $u \in U$ bezeichne $\langle u\rangle$ den von u erzeugten Unterraum. Definiere $\pi(u) = u \cup \zeta(V \setminus \langle u\rangle)$, falls $V \setminus \langle u\rangle \neq \emptyset$, und $\pi(u) = u$ sonst. π hat Fixpunkt b und b ist maximal linear unabhängige Menge.

[8] Tarski setzt voraus, daß $\sup u$ für *jede* Teilmenge $u \subseteq a$ existiert.